R F 1509/E
49. 1987

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

1988-04-13

SERIA ELECTROTEHNICĂ

TOMUL XLIX, ANUL 1987

COMITETUL DE REDACȚIE

REDACTOR RESPONSABIL : Prof. dr. ing. *Voicu Tache*
MEMBRII : Prof. dr. ing. *Constantin Bălă* ; Conf. dr. ing. *Cornel Berbente* ; Prof. dr. docent *Gheorghe Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R. S. România ; Prof. dr. ing. *Ioan Caraboglan* ; Prof. dr. ing. *Sergiu Călin* (secretar științific) ; Prof. dr. docent *Virgil Constantinescu* ; Prof. dr. docent *Felicia Cornea* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Dănescu* ; Prof. dr. docent *Traian Demian* (redactor responsabil adjunct) ; Prof. dr. ing. *Octavian Floarea* ; Prof. dr. ing. *Julieta Florea* ; Prof. dr. ing *Nicolae Geru* ; Prof. dr. ing. *Berthold Grünwald* ; Prof. dr. *Ion Grădișteanu* ; Prof. dr. ing. *Gheorghe Hortopan* ; Prof. dr. ing. *Moise Ienciu* ; Prof. dr. ing. *Vlad Ionescu* ; Prof. dr. ing. *Adelaida Mateescu* ; Prof. ing. *Jean Moncea* ; Prof. dr. ing *Nicolae Murguleț* ; Prof. dr. docent *Florea Oprea* ; Prof dr ing. *Aurel Oprean* ; Prof. dr. ing. *Mircea Petrescu* ; Prof. dr. ing. *Ion Popescu* ; Conf. dr. ing. *Mircea Radeș* ; Conf. dr. ing. *Sorin Roșca* ; Prof. dr. ing *George Rulea* ; Prof. dr. ing. *Marcel Segărceanu* ; Prof. dr. ing. *Alexandru Spătaru* ; Prof. dr. *Octavian Stănășilă* ; Prof. dr. docent *Ion Teoreanu* ; Prof. dr. docent *Andrei Țugulea* ; Prof. dr. ing. *Silvia Vacu* ; Prof. dr. docent *Rodica Vîlcu* ; Academician *Radu Voinea*.

Editor : Institutul Politehnic București
Splaiul Independenței 313, Tel. 31.40.10. România, Căsuța poștală 2356

Readers from abroad can get subscriptions for this newspaper through ROMPRESFILATELIA, Import export press, P.O. Box 12-201, Telex 10378, Calea Griviței 62—64, Bucharest, ROMANIA

Sumar

M. Roşculeţ
Analicitate în raport cu un operator diferenţial E (l. franceză) 3

Gh. Simion
Asupra unei teoreme de punct fix 7

M. Rebenciuc
Secţiunea unei relaţii neomogene binare într-o categorie relativ la un subobiect (l. engleză) 11

L. Stoichev
Metodă pentru determinarea rădăcinilor reale ale unei funcţii folosind interpolarea spline (l.engleză) 19

M. Stan
Spectrul de fluctuaţii pentru procese stochastice impulsionale (l. engleză) 23

P. Sterian, E. Ştefănescu, I. M. Popescu
Condiţii pentru bistabilitatea optică absorbtivă şi dispersivă 29

C. Gary, G. Drăgan, I. Lungu
Determinarea intensităţii iniţiale a cîmpului electric şi timpul de apariţie a descărcării corona în jurul conductoarelor (l. engleză) 35

S. Călin
Optimizarea conducerii sistemelor flexibile de fabricaţie 41

D. Stanomir
Recuperarea semnalelor folosind metoda valorilor proprii singulare (l. engleză) . . 55

Carmen Golovanov
Măsurarea energiei active în regim deformant (l. engleză) 61

M. Iordache, Lucia Dumitriu, M. Perpelea
Analiza topologică : cheia formulării pe calculator a ecuaţiilor circuitului 77

M. Mihalache
Determinarea mărimilor de regim staţionar ale generatoarelor sincrone cuplate la reţea 87

C. Dumitriu, Lucia Dumitriu, V. Postan
Model operaţional privind conducerea automată a sistemelor electroenergetice în condiţii de securitate 95

Summary

M. Roşculeţ

Analyticity by Ratio to a Differential Operator E 3

G. Simion

About the Theorem of Fixed Point 7

M. Rebenciuc

The Section of a Binary Non-Homogeneous Relation in a Category Relative to a Subobject (I) 11

L. Stoichev

A Method for Finding the Real Roots of Equations by Interpolation Spline 19

M. Stan

Fluctuation Spectrum for Stochastic Impulsional Processes 23

P. Sterian, E. Ştefănescu, I. M. Popescu

Operation Conditions for the Absorptive and Dispersive Optical Bistability 29

C. Gary, G. Drăgan, I. Lungu

Corona Inception Gradient and the Delay Time of the Onset Corona around Conductors 35

S. Călin

Flexible Manufacturing Systems Control Optimization 41

D. Stanomir

Signal Restoration by the Use of the Singular Value Analysis 55

Carmen Golovanov

The Measurement of the Active Energy in Distorting Regime 61

M. Iordache, Lucia Dumitriu, M. Perpelea

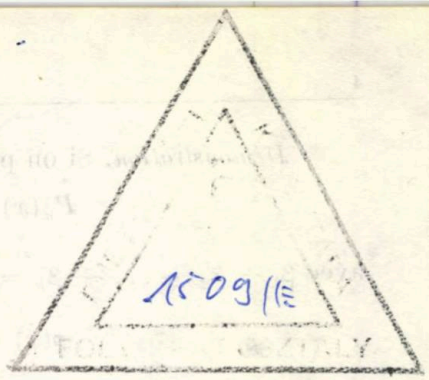
The Topological Analysis : the Key of the Circuit Equations' Formulation on Computer 77

M. Mihalache

Determination of the Steady-State Quantities of the Mains Connected Synchronous Generator 87

C. Dumitriu, Lucia Dumitriu, V. Bostan

Operating Model for Automatic Control in Security Conditions of the Electrical Power Systems 95



C.Z.: 517.43
517.93

ANALYTICITÉ PAR RAPPORT À UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL E

M. N. ROȘCULEȚ*

Dans cette note l'A.montre que toute fonction f, analytique en $D \subset R^p$, peut-être écrite sous la forme

$$f(x) = \psi_0(x) + \rho^m(x)\psi_1(x) + \ldots + \rho^{mn}(x)\psi_n(x) + \ldots$$

avec $E(\psi)_k = 0$ et $E = a_{\alpha_1\alpha_1\ldots\alpha_p} \dfrac{\partial^m}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_p^{\alpha_p}}$,

ou $\rho^m(x) = a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_p^{\alpha_p}$, $a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \in \mathrm{R}$.

Les fonctions ψ_k sont uniques.

Soit E un opérateur différentiel

$$E = a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \frac{\partial^m}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_p^{\alpha_p}}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = m, \tag{1}$$

avec $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in D \subset R^p$, $a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \in \mathrm{R}$.
Associons à E le polynome homogène de degré m

$$\rho^m(x) = a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_p^{\alpha_p}, \tag{2}$$

qui contient C_{m+p-1}^p monomes.

Lemme 1. Un polynôme homogène de degré m en $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $p_m(x)$ peut-être écrit toujours sous la forme

$$P_m(x) = \lambda\rho^m(x) + \varphi(x), \quad \lambda \in \mathrm{R}, \tag{3}$$

avec $E(\varphi) = 0$ et λ, φ uniques.

* Prof. ing. dr. doc., Chaire de Mathématiques.

Démonstration. Si on pose

$$P_m(x) = b_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_p^{\beta_p},$$

avec $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p = m$ et

$$\varphi(x) = c_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_p} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_p^{\gamma_p},$$

avec $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_p = m$, l'identité (3) s'écrit

$$b_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_p^{\beta_p} \equiv \lambda a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} + c_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_p} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_p^{\gamma_p},$$

qui donne les liaisons

$$b_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} = \lambda a_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} + c_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p},$$

auxquelles on doit ajouter

$$\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_p! c_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} a_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = 0,$$

qui déterminent λ et $c_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_p}$, uniquement; q.e.d.

Lemme 2. Un polynôme homogène de degré $m + k$, $k < m$, en $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $P_{m+k}(x)$, peut-etre écrit toujours sous la forme

$$P_{m+k}(x) = \varphi_0(x) + \rho^m(x)\, \varphi_1(x), \tag{4}$$

avec φ_0, φ_1 polynômes homogènes de degré $m + k$ et k respectivement avec $E(\varphi_0) = 0$, $E(\varphi_1) = 0$. φ_0 et φ_1 sont uniques.

Démonstration. On a immédiatement $E(\varphi_1) = 0$ parce que φ_1 est homogène de degré $k < m$. Soient

$$\varphi_0(x) \equiv c_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_p} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_p^{\gamma_p}, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_p = m + k,$$

$$\varphi_1(x) \equiv d_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_p} x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \ldots x_p^{\delta_p}, \quad \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_p = k$$

et

$$P_{m+k}(x) \equiv b_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_p^{\beta_p}, \quad \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p = m + k.$$

On doit avoir $E(\varphi_0) = 0$, fait qui conduit à C_{k+p-1}^p relations entre les coefficients $c_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_p}$.

L'identité (4) conduit à $C_{m+p+k-1}^p$ rélations; la condition $E(\varphi_0) = 0$, ajoute encore C_{k+p-1}^p conditions.

Les polynômes φ_0 et φ_1 introduisent $C_{m+p+k-1}^p + C_{p+k-1}^p$ paramètres, donc tous les coefficients de φ_0 et φ_1 sont uniquement déterminés par rapport aux coefficients du polynôme doné $P_{m+k}(x)$; q.e.d.

Théorème 1. Un polynôme homogène de degré $mn + k$, en $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $P_{mn+k}(x)$, peut-être écrit toujours sous la forme

$$P_{mn+k}(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)\rho^m(x) + \ldots + \varphi_n(x)\rho^{mn}(x), \tag{5}$$

avec $E(\varphi_h) = 0$, $h = 0, 1, \ldots, n$; les polynômes φ_h sont uniques.

Démonstration. On observe que φ_h est un polynôme de degré $m(n - h) + k$, donc il introduit

$$C^p_{m(n-h)+k+p-1}$$

coefficients arbitraires et que la condition $E(\varphi_h) = 0$, introduit

$$C^p_{m(n-h)+k+p-m-1}$$

conditions. L'identité (5) conduit à

$$C^p_{mn+p+k-1}$$

liaisons entre les coefficients qui interviennent en (5). Les conditions $E(\varphi_h) = 0$, $h = 0, 1, \ldots, n$, ajoutent (lemmes 1 et 2)

$$C^p_{mn+k+p-m-1} + C^p_{m(n-1)+k+p-m-1} + \ldots + C^p_{k+p-1}$$

nouvelles liaisons.

Le nombre des paramètres non determinés est le nombre des coefficients des fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ donné par

$$C^p_{mn+k+p-1} + C^p_{m(n-1)+k+p-1} + \ldots + C^p_{k+p-1},$$

donc le même ; les coefficients des φ_h sont uniquement déterminés ; q.e.d.

Théorème 2. Toute fonction $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, analytique en $D \subset R^p$, peut-être écrite en D sous la forme

$$f(x) = \psi_0(x) + \rho^m(x)\psi_1(x) + \ldots + \rho^{mn}(x)\,\psi_n(x) + \ldots \tag{6}$$

avec E et ρ^m données par (1) et (2), ψ_h analytiques en D et $E(\psi_h) = 0$.

Démonstration. La fonction $f(x)$ étant analytique en D, dans l'intérieur de D nous pouvons regrouper les monômes de f, de sorte que f s'écrit sous la forme

$$f(x) = P_0(x) + P_1(x) + \ldots + P_k(x) + \ldots$$

où $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ sont des polynômes de degré k dans les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Utilisant le th. 1, on a pour $k = mn + h$

$$P_k(x) = \varphi_0(x) + \rho^m(x)\varphi_1(x) + \ldots + \rho^{mn}(x)\varphi_n(x),$$

expressions qui, introduites en (6), nous conduisent à

$$f(x) = \psi_0(x) + \rho^m(x)\psi_1(x) + \ldots + \rho^{mn}(x)\psi_n(x) + \ldots +$$

où $\psi_k(x)$ sont des fonctions analytiques en D, solutions de l'équation $E(\psi) = 0$, q.e.d.
Pour des cas particuliers concernant l'opérateur E, voir [1].

BIBLIOGRAPHIE

1. *M. Roşculeţ*, Equations différentielles et applications. Analiticité. Opérateurs intégraux. Formules de moyenne. Ed. Ac. R.S.R. 1984.

Analicitate în raport cu un operator diferenţial E

În această notă autorul arată că orice funcţie f, analitică în $D \subset R^p$, poate fi scrisă sub forma

$$f(x) = \psi_0(x) + \rho^m(x)\psi_1(x) + \ldots + \rho^{mn}(x)\psi_n(x) + \ldots$$

cu E, $\rho^m(x)$ date de

$$E = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \frac{\partial^m}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}}; \quad \rho^m(x) = a_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p},$$

cu $E(\psi_k(x)) = 0$.
Funcţiile ψ_k sînt unice.

C.Z.: 510.5

ASUPRA UNEI TEOREME DE PUNCT FIX

GH. SIMION *

În această notă este prezentat conceptul de spațiu topologic ordonat care extinde conceptul de spațiu Banach cu con închis. Sînt prezentate o lemă și două teoreme de punct fix.

Fie X, un spațiu topologic separat și $\leqslant$ o relație de ordine. Notăm pentru $x \in X$, $C_x^+ = \{y \in X \mid y \geqslant x\}$, $C_x^- = \{y \in X \mid y \leqslant x\}$.

Definiție. X se numește spațiu topologic ordonat, dacă, oricare ar fi $x \in X$, mulțimile C_x^+ și C_x^- sînt închise.

Definiție. Fie X o mulțime înzestrată cu o relație de ordine $\leqslant$. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de elemente din x și $x \in X$. Se pare că $x_n \xrightarrow{o} x((x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge în ordine către x) dacă există șirurile (a_n) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din X astfel încît $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescător, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ descrescător și $\bigvee_n a_n = x$, $\bigwedge_n b_n = x$.

Vom nota prin $x_n \uparrow$ faptul că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător. Prin $x_n \uparrow x$ vom înțelege faptul că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este crescător și $\bigvee_n x_n = x$. În mod asemănător au sens notațiile $x_n \downarrow$, $x_n \downarrow x$.

Este cunoscut faptul că dacă $x_n \uparrow$ (sau $x_n \downarrow$) rezultă că $x_n \xrightarrow{o} x$ dacă și numai dacă $x_n \xrightarrow{o} x$ (sau $x \to x$).

Lema. Fie X un spațiu topologic ordonat. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de elemente din X și $x \in X$. Dacă $x_n \xrightarrow{\tau} x$ (topologic) și $x_n \uparrow$ atunci $x_n \xrightarrow{o} x$ (Un șir crescător și convergent topologic este convergent în ordine).

Demonstrație. Avem $x_n \geqslant x_m$ oricare ar fi $n \geqslant m$. Deci $x_n \in C_{x_m}^+$ pentru $n \geqslant m$. Deoarece $C_{x_m}^+$ este închisă rezultă $x \in C_{x_m}^+$. Deci $x \geqslant x_m$ oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$. Deci x este un majorant pentru $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$. Vom arăta că este și cel mai mic, adică $x = \bigvee_n x_n$. Fie deci y un majorant pentru $\{x_n / n \in \mathbb{N}\}$. Deci $x_n \leqslant y$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Deoarece C_y^- este închisă, rezultă $x \leqslant y$. Deci x este cel mai mic majorant, adică $x = \bigvee_n X_n$. Cum $x_n \uparrow$ rezultă $x_n \xrightarrow{o} x$.

Observație. Un enunț analog are loc pentru șiruri descrescătoare.

Definiție. Un șir dintr-o mulțime ordonată se numește o — mărginit dacă există a, $b \in X$ astfel încît $a \leqslant x_n \leqslant b$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

* Lector, catedra Matematici II

Definiție Fie X o mulțime ordonată, $A \subset X$, $f : A \to X$. f se numește izotonă, dacă din $x, y \in A$, $x \leqslant y$ rezultă $f(x) \leqslant f(y)$. f se numește 0-continuă dacă pentru orice $x \in A$ și oricare $x_1 \in A$ cu $x_n \xrightarrow{o} x$ rezultă $f(x_n) \xrightarrow{o} f(x)$.

Avînd o mulțime ordonată X, $a, b \in X$, $a \leqslant b$ numim interval în ordine mulțimea $[a, b] = \{x \in X \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

Teorema 1. Fie X un spațiu topologic ordonat astfel încît oricare ar fi șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ crescător și 0 — mărginit este convergent topologic. Fie $f : [a, b] \to [a, b]$, $a, b \in X$, $a \leqslant b$ astfel încît f să fie τ-continuă și izotonă. Atunci f admite cel puțin punctele fixe $\varphi_f(a)$, $\varphi_f(b)$ obținute prin metoda aproximațiilor succesive începînd cu a și respectiv b. În plus are loc inegalitatea $\varphi_f(a) \leqslant \varphi_f(b)$.

Demonstrație. Fie $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit astfel $x_0 = a$, $X_{n+1} = f(x_n)$. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este o — mărginit $(a \leqslant x_n \leqslant b)$ și crescător $(a = x_0 \leqslant x_1 \Rightarrow f(x_0) \leqslant f(x_1) \Rightarrow x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow \ldots x_n \leqslant x_{n+1} \ldots)$. Conform ipotezei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este τ—convergent la $x \in X$. Deoarece $a \leqslant x_n \leqslant b$ rezultă $a \leqslant x \leqslant b$, ($C_a^+$, C_b^- sînt închise). Vom arăta că x este punct fix pentru f pe care-l vom nota cu $\varphi_f(a)$. Avem :

$$\left.\begin{matrix} x_n \xrightarrow{\tau} x \\ x_{n+1} \xrightarrow{\tau} x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_n \xrightarrow{\tau} x \\ f(x_n) \xrightarrow{\tau} x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f(x_n) \xrightarrow{\tau} f(x) \\ f(x_n) \xrightarrow{\tau} x \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) = x.$$

(Spațiul este presupus separat).

Deci $x = \varphi_f(a)$ este punct fix pentru f.

Fie acum $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit astfel $x'_0 = b, x'_{n+1} = f(x'_n)$. În mod asemănător se demonstrează că $(x'_n)_n$ este τ — convergent la $x' \in X$ și că x' este punct fix pentru f. Notăm $x' = f_f(b)$.

Deoarece $x_0 \leqslant x'_0$ rezultă $x_1 \leqslant x'_1$ și așa mai departe $x_n \leqslant x'_n$. Vom arăta că oricare ar fi n, $m \in \mathbb{N}$ avem $x_n \leqslant x'_m$. Dacă $n < m$ avem : $x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant x_m \leqslant x'_m$, deci $x_n \leqslant x'_m$. Dacă $n > m$ avem : $x_n \leqslant x'_n \leqslant x'_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant x'_m$, deci $x_n \leqslant x'_m$. Deci $x_n \in C_{x'_m}^-$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Deci $x \in C_{x'_m}^-$, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$. Deci $x \leqslant x'_m$ oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$. Deci $x'_m \in C_x^+$ oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$, deci $x' \in C_x^+$, deci $x \leqslant x'$.

Corolar. Dacă X este spațiu Banach cu con închis C astfel încît orice șir crescător și 0 — mărginit este convergent topologic atunci oricare ar fi $a, b \in X$, $a \leqslant b$ și $f : [a, b] \to [a, b]$ izotonă și τ-continuă există punctele fixe $\varphi_f(a)$, $\varphi_f(b)$, obținute prin metoda aproximațiilor succesive începînd cu a și b.

Teorema 2. Fie X un spațiu topologic ordonat astfel încît oricare ar fi șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ crescător și 0 — mărginit este convergent topologic. Fie $f : [a, b] \to [a, b]$, $a, b \in X$, $a \leqslant b$ astfel încît f să fie 0 — continuă și izotonă. Atunci f admite cel puțin punctele fixe $\varphi_f(a)$ și $\varphi_f(b)$ obținute prin metoda aproximațiilor succesive începînd cu a și respectiv b. În plus are loc $\varphi_f(a) \leqslant \varphi_f(b)$.

Demonstrație. Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definit astfel $x_0 = a, x_{n+1} = f(x_n)$. Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este 0 — mărginit și crescător deci τ — convergent, la $x \in X$. Deoarece

$a \leqslant x_n \leqslant b$ și C_a^+, C_b^- sînt închise rezultă $a \leqslant x \leqslant b$. Vom arăta că x este punct fix pentru f pe care-l vom nota cu $\varphi_f(a)$. Avem :

$$\left.\begin{matrix} x_n \xrightarrow{\tau} x \\ x_n \uparrow \end{matrix}\right\} \overset{\text{Lemă}}{\Rightarrow} x_n \xrightarrow{o} x \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{o} f(x) \Rightarrow x_{n-1} \xrightarrow{o} f(x).$$

Dar $x_{n+1} = f(x_n) \xrightarrow{\tau} x$, $x_{n+1} \uparrow$, deci $x_{n+1} \xrightarrow{o} x$.

De unde rezultă că $f(x) = x$.

Fie acum $(x_n')_{n \in \mathbb{N}}$, definit astfel $x_0' = b$, $x_{n+1}' = f(x)$. Asemănător se demonstrează că $x_n' \xrightarrow{\tau} x' \in [a, b]$ și că x' este punct fix pentru f. Notăm $x' = \varphi_f(b)$.

Faptul că $x \leqslant x'$ se demonstrează identic ca în teorema 1.

BIBLIOGRAFIE

1. *R. Cristescu*, Structuri de ordine în spații liniare normate. Editura științifică și enciclopedică, București, 1983.
2. *L. V. Kantorovoci, B. Z. Vulih, A. G. Pinsker*, Analiză funcțională în spații semiordonate (în limba rusă) Moscova — Leningrad, 1950.

About a Theorem of Fixed Point

In the present note is presented the concept of ordered topological-space which extends the concept of Banach space with closed cone. It is presented a lema and also two theorems of fixed point. Theorem 1 is an extension of a result presented in (1) (Proposition 1, § 2. chapter V).

C.Z.: 510.5

THE SECTION OF A BINARY NON-HOMOGENEOUS RELATION IN A CATEGORY RELATIVE TO A SUBOBJECT (1)

M. REBENCIUC *

In this part of the paper it is defined the section (relative to a subobject) of a binary non-homogeneous relation in a wellpowered and wellcopowered category with products, coproducts and triangular decomposition and it proves that the connection properties between taking off section and inclusion, (finite) intersection and (finite) union of subobjects are well preserved. Finally, properties of some morphisms relating to a binary non-homogeneous relation in a topoi, which are remarkable for Set (the category of sets) and obtained by internalization are given.

1. A Definition and Some Properties of Section in a Category

Observation 1.1. A wellpowered and wellcopowered category $\mathscr{C}$ with products, coproducts, and triangular decomposition (finite intersections) has intersections, images (even minimal triangular decomposition), fibered products (therefore and inverse images) and fibered coproducts ($\mathscr{C}$ is complete and cocomplete) [2,7].

Observation 1.2. In the following we shall denote by $\mathrm{Rel}(A, B)$ the set of binary non-homogeneous relations on A, B (from A to B), where A, B are objects of $\mathscr{C}$. An element of $\mathrm{Rel}(A, B)$ will be indicated by the equivalent forms :

1) a subobject $r : R \hookrightarrow AXB$ of the finite product AXB;

2) two morphisms $r_A : R \to A, r_B : R \to B$, so that the morphism induced by the set $\{r_A, r_B\}$, $\langle r_A, r_B\rangle : R \to AXB$ (the unique morphism in $\mathscr{C}(R, AXB)$ such that $p_1\langle r_A, r_B\rangle = r_A$, $p_2\langle r_A, r_B\rangle = r_B$) is monomorphism [6,7].

We note that $\mathrm{Rel}(A, B) = \mathrm{Sub}(AXB)$ (the set of subobjects of the finite product AXB).

Definition 1.3 (of section). The section of a relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B), r = \langle r_A, r_B\rangle : R \hookrightarrow AXB$ relative to a subobject $X \subseteq A$ (the X-section of a

---

* Assistant, Chair of Mathematics

relation r) is a subobject of B, denoted by $r(X)$ and defined by $r(X) = r_B(r_A^*(X))$ or by the diagram

$$\begin{array}{ccccc} r(X) & \hookleftarrow & r_A^*(X) & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{r_B} & R & \xrightarrow{r_A} & A \end{array}$$

with the right hand square cartesian and the left hand square commutative.

Lemma 1.4. Let $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$ and $X_i \subseteq A$, $i \in \{1,2\}$ be a relation, respectively subobjects of A; if $X_1 \subseteq X_2$ then $r(X_1) \subseteq r(X_2)$.
Proof. The inclusion $r(X_1) \subseteq r(X_2)$ is a direct consequence of the properties of image and inverse image.

Theorem 1.5 (or intersection of subobjects). Let $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$ and $\{X_i\} \subset \mathrm{Sub}(A)$ be a relation, respectively a (finite) set or subobjects of A. Then the inclusion $r(\cap X_i) \subseteq \cap r(X_i)$ is true.

Proof. There exists the (finite) intersections $\cap X_i \in \mathrm{Sub}(A)$, $\cap r(X_i) \in \mathrm{Sub}(B)$. For each index i of a (finite) set, $\cap X_i \subseteq X_i$, so that according to Lemma 1.4 we have the inclusion $r(\cap X_i) \subseteq r(X_i)$, that is the monomorphism $m : r(\cap X_i) \hookrightarrow B$ factors through the monomorphism $m_i : r(X_i) \hookrightarrow B$. Using once more the definition of intersection, it follows that the monomorphism $m : r(\cap X_i) \hookrightarrow B$ factors (uniquely) through the monomorphism $m' : \cap r(X_i) \hookrightarrow B$, i.e. $r(\cap X_i) \subseteq \cap r(X_i)$.

Theorem 1.6 (of union of subobjects). Let $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $r = \langle r_A, r_B \rangle : R \hookrightarrow AXB$ and $\{X_i\} \subset \mathrm{Sub}(A)$ be a relation, respectively a (finite) set of subobjects of A which satisfy the following conditions:

C) For any pair (z, f) (where $z : Z' \hookrightarrow Z$ is subobject, $f : B \to Z$ is morphism and Z is object of $\mathscr{C}$) there exists a morphism $g : A \to Z$ such that if the (finite) set of sections $\{r(X_i)\}$ is carried into Z' by the morphism f, then the (finite) set of subobjects $\{X_i\} \subset \mathrm{Sub}(A)$ is carried into Z' by the morphism g and the coangle $A \xleftarrow{r_A} R \xrightarrow{r_B} B$ can be embedded in the commutative square

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{r_B} & B \\ {\scriptstyle r_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow{g} & Z. \end{array}$$

U) There exists the (finite) union $X = \cup X_i$.

Then also exists the (finite) union $\cup r(X_i)$ and the equality $r(\cup X_i) = \cup r(X_i)$.

Proof. For any pair (z, f) (where $z : Z' \hookrightarrow Z$ is subobject, $f : B \to Z$ is morphism and Z is object of $\mathscr{C}$) suppose that the (finite) set of sections $\{r(X_i)\}$ is carried into Z' by the morphism f, i.e. for each index i of a

(finite) set, the X_i-section $r(X_i)$ is carried into Z' by f with the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} r(X_i) & \xrightarrow{f'_i} & Z' \\ {\scriptstyle m_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle z} \\ B & \xrightarrow{f} & Z. \end{array}$$

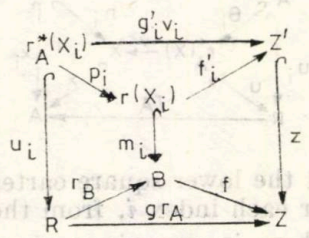
The condition C) assures the existence of a morphism $g : A \to Z$ such that the (finite) set of subobjects $\{X_i\} \subset \mathrm{Sub}(A)$ is carried into Z' by g, i.e. for each index i, the subobject $X_i \subseteq A$ is carried into Z' by g with the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{g'_i} & Z' \\ {\scriptstyle x_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle z} \\ A & \xrightarrow{g} & Z. \end{array}$$

The property of transitivity applied to the above commutative square and to the cartesian square

$$\begin{array}{ccc} r^*_A(X_i) & \xrightarrow{v_i} & X_i \\ {\scriptstyle u_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x_i} \\ R & \xrightarrow{r_A} & A \end{array}$$

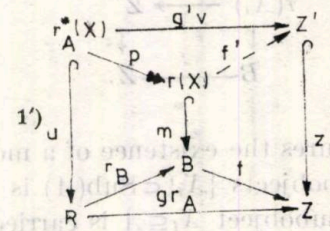
and the condition C) give the diagram



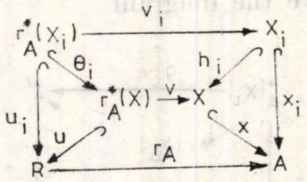
with the squares and the lower triangle commutative. The equalities $z(g'_i v_i) = g r_A u_i = f r_B u_i = f m_i p_i = z(f'_i P_i)$ and the fact that z is monomorphism imply that in the diagram 1) the upper triangle is also commutative, i.e. for each index i the morphisms f'_i and g'_i satisfy the condition 2) $g'_i v_i = f'_i p_i$. By the condition U) the subobject $X = \cup X_i \subseteq A$ is also carried into Z' by g with the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g'} & Z' \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & Z. \end{array}$$

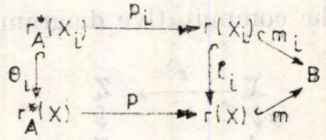
The property of transitivity applied to the above commutative square and to the cartesian square $(r_A^*(X), u, v)$ of the angle $R \xrightarrow{r_A} A \xleftarrow{x} X (u : r_A^*(X) \hookrightarrow R,\ v : r_A^*(X) \to X$ are the structural projections) lead us to the diagram



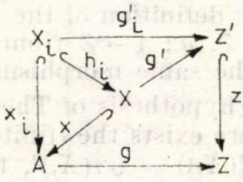
with the great square, the left hand square and the lower triangle commutative. If (in addition) there is a morphism $f' : r(X) \to Z'$ such that the upper triangle is commutative (the morphism f' and g' satisfy the condition 2') $g'v = f'p$), then from the equalities $(zf')p = zg'v = gr_Au = fr_Bu = (fm)p$ and the fact that $p : r_A^*(X) \to r(X)$ is epimorphism it follows that in the diagram 1') the right hand square is also commutative, which means that the X-section $r(X)$ is carried into Z' by the morphism f with commutative diagram. Furthermore, the X-section $r(X)$ contains all of the X_i-sections $r(X_i)$, since for each index i, $X_i \subseteq X$ and according to Lemma 1.4. Therefore the X-section $r(X)$ is the (finite) union of the (finite) set of X_i-sections $r(X_i)$. The proof is complete if can be constructed a morphism $f' : r(X) \to Z'$ which, together with the morphism $g' : X \to Z'$ satisfy the condition 2'). For this using the inclusion $X_i \subseteq X$ it follows the diagram



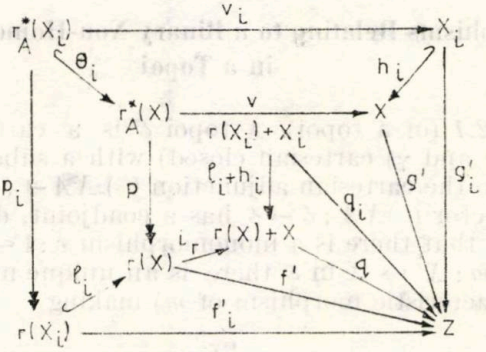
with the great square and the lower square cartesian and the right hand triangle commutative. For each index i, from the equalities $r_Au_i = x_iv_i = xh_iv_i$ it results that there is an unique monomorphism $\theta_i : r_A(X_i) \hookrightarrow r_A^*(X)$ such that $u_i = u\theta_i$, $v\theta_i = h_iv_i$ (the left hand triangle and the upper square are commutative). In addition $m_ip_i = r_Bu_i = r_Bu\theta_i = mp\theta_i$. The inclusion $r(X_i) \subseteq r(X)$ gives the factorisation $m_i = ml_i$, with $1_i : r(X_i) \hookrightarrow r(X)$ a monomorphism. Consequently the diagram



has the polygonal contour and the right hand triangle commutative, therefore and the square commutative. The diagram has the squares and the left hand triangle commutative. From the equalities $zg'_i = gx_i = gxh_i =$



$= z(g'h_i)$ it follows that the upper triangle is commutative. Using (in addition) the condition 2) we obtain the diagram



with the great square, the left hand square, the upper square and the right hand triangle commutative. Consider $r(X_i) + X_i$ and $r(X) + X$ the coproducts of the objects $r(X_i)$, X_i, respectively $r(X)$, X and the corresponding structural injections $i_{r_i} : r(X_i) \to r(X_i) + X_i$, $i_{X_i} : X_i \to r(X_i) + X_i$, respectively $i_r : r(X) \to r(X) + X$, $i_X : X \to r(X) + X$. There exist the unique morphisms $q_i : r(X_i) + X_i \to Z$, $u_{r_i} : r(X_i) + X_i \to r(X)$, $u_{X_i} : r(X_i) + X_i \to X$, respectively $q : r(X) + X \to Z$ such that $f'_i = q_i i_{r_i}$, $g'_i = q_i i_{X_i}$, $1_i = u_{r_i} i_{r_i}$, $h_i = u_{X_i} i_{X_i}$, $g' = q i_X$. From the equalities $g'_i = q_i i_{X_i} = g'h_i = q i_X u_{X_i} i_{X_i}$ and the uniqueness of the morphism q_i, it follows the equality $q_i = q i_X u_{X_i}$. Let be (in addition) the coproduct of the morphisms 1_i, h_i, i.e. the unique morphism $1_i + h_i : r(X_i) + X_i \to r(X) + X$ such that $(1_i + h_i) i_{r_i} = i_r 1_i$, $(1_i + h_i) i_{X_i} = i_X h_i$. From the equalities $(i_r u_{r_i}) i_{r_i} = i_r (u_{r_i} i_{r_i}) = i_r 1_i$, $(i_X u_{X_i}) i_{X_i} = i_X (u_{X_i} i_{X_i}) = i_X h_i$ and the uniqueness of the morphism $1_i + h_i$ we obtain the equalities $1_i + h_i = i_r u_{r_i} = i_X u_{X_i}$. Therefore we have $q_i = q(1_i + h_i)$. Finally taking $f' = q i_r$ it results that $f'1_i = q i_r 1_i = q(1_i + h_i) i_{r_i} = q_i i_{r_i} = f'_i$, that is there exists a morphism $' : r(X) \to Z$ such that the lower triangle is also commutative. In addition we obtain the equalities $f' p \theta_i = f' 1_i p_i = f'_i p_i = g'_i v_i = g' h_i v_i = g' v \theta_i$. On

the other hand according to the definition of union we have that $X \cup X = (\cup X_i) \cup X = X$. From the diagram which results taking $X_i = X$ in the diagram 3) (with $r(X_i) = r(X)$, $r_A^*(X_i) = r_A^*(X)$) it follows that $f'p = g'v$. Another way to prove the equality 2') is similar to that contained in [7].

Observation 1.7. By the definition of the fibered coproduct it follows that the morphisms $f : B \to Z$, $g : A \to Z$ from the proof of Theorem 1.6 factor (uniquely) through the same morphism.

Observation 1.8. If the hypothesis of Theorem 1.6. contains in addition the condition „UI) There exists the (finite) union $\cup r_A^*(X_i)$ · "then if follows the equality $r_B(\cup r_A^*(X_i)) = \cup r(X_i)^2$, therefore and the equality $r_B(\cup r_A^*(X_i)) = r_B(r_A^*(\cup X_i))$. Consequently, for a relation $r = \langle r_A, r_B \rangle : R \hookrightarrow A \times B$ with $r_B : R \to B$ a monomorphism we obtain the equality $r_A^*(\cup X_i) = \cup r_A^*(X_i)$, since the functor direct image associated with r_B is full and faithful [2].

2. Some Morphisms Relating to a Binary Non-Homogeneous Relation in a Topoi

Definition 2.1 (of a topoi). A topoi $\mathscr{E}$ is a cartesian category (1) finitely complete and γ) cartesian closed) with a subobject classifier (3), where 2) refers to the cartesian adjunction $(\ ) \times A \dashv (\ )^A$, that is for any object A the functor $(\ ) \times A : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ has a coadjoint, denoted $(\ )^A$ and 3) refers to the fact that there is a monomorphism $v : 1 \hookrightarrow \Omega$, so that for any monomorphism $m : X' \hookrightarrow X$ in $\mathscr{E}$ there is an unique morphism $\varphi_m : X \to \Omega$ (named the characteristic morphism of m) making

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\omega_{X'}} & 1 \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ X & \xrightarrow{\varphi_m} & \Omega \end{array}$$

a fibered product q(with $\omega_{X'} : X' \to 1$ the unique morphism).

Observation 2.2 Particularly, in a topoi $\mathscr{E}$ the X-section of a relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $r = \langle r_A, r_B \rangle : R \hookrightarrow A \times B$ (of Definition 1.3) can be defined by $r(X) = \exists_{r_B}(r_A^{-1}(X))$, where $\exists_{r_B} : \mathrm{Sub}(R) \to \mathrm{Sub}(B)$ is the functor existential quantifier associated with r_B and $r_A^{-1} : \mathrm{Sub}(A) \to \mathrm{Sub}(R)$ is the functor inverse image associated with r_A. In Set (which particularly is a topoi [5]), $r(X) = \{b \in B / \exists\ (a, b) \in R$ with $a \in X\} = \{b \in B / \exists a \in X$ such that $(a, b) \in R\}$, where the last set is the usual section (denoted by $R(X)$) of the relation r (denoted by R) relative to the subset X of the set A.

Observation 2.3. Relating to the category $\mathscr{C}$ of Observation 1.1, a topoi $\mathscr{E}$ has (in addition) finite unions and unique triangular decomposition, but has only finite intersections [5, 7]. Consequently, for a topoi $\mathscr{E}$ and finite set $\{X_i\} \subset \mathrm{Sub}(A)$ the condition U) from the hypothesis of Theorem 1.6 is not necessary; in Set the conditions U), C) are satisfied, so that the equality $r(\cup X_i) = \cup r(X_i)$ is true for any relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$ and (finite) set of subobjects $\{X_i\} \subset \mathrm{Sub}(A)$.

Definition 2.4. (of the point morphism). For any object X of $\mathscr{E}$ the point morphism is the monomorphism $\{\cdot\}_X : X \hookrightarrow P(X)$[5] which corresponds to the characteristic morphism $\delta : XXX \to \Omega$ of the subobject $\Delta_X = \langle 1_X, 1_X\rangle : X \hookrightarrow XXX$ by the cartesian adjunction, that is the unique monomorphism $\{\cdot\}_X$ such that $e_X(\{\cdot\}_X X 1_X) = \delta$, where $P(X) = \Omega^X$ and $e_X : P(X)X \to X\Omega$ is the adjunction.

Definition 2.5 (of the segments on the right and on the left). The segment on the right of a relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $r : R \hookrightarrow AXB$ is the morphism $\vec{R} : A \to P(B)$ which corresponds to the characteristic morphism $\vec{\varphi}_r : AXB \to \Omega$ of r by the cartesian adjunction, that is the unique morphism $\vec{R}$ such that $e_B(\vec{R}X1_B) = \varphi_r$. The segment on the left of the relation r is the segment on the right of the inverse $r^{-1} \in \mathrm{Rel}(B, A)$, $r^{-1} = \langle r_B, r_A\rangle : R^{-1} \hookrightarrow BXA (R^{-1} = R)$ of r, denoted $\overleftarrow{R}$, i.e. $\overleftarrow{R} = \vec{R^{-1}} : B \to P(A)$.

Definition 2.6 (of composition). The composition (product, composite relation) of the binary non-homogeneous relations $r_i \in \mathrm{Rel}(A_i, A_{i+1})$, $r_i = \langle r^i_{A_i}, r^i_{A_{i+1}}\rangle : R_i \hookrightarrow A_i X A_{i+1}$, $i \in \{1, 2\}$ is the binary relation $r_3 \in \mathrm{Rel}(A_1, A_3)$, denoted $r_2 \circ r_1$ or $R_2 \circ R_1$ and defined by $r_3 : \mathrm{Im}\langle r^1_{A_1} u_1, r^2_{A_3} u_2\rangle \hookrightarrow A_1 X A_3$ making the square of the diagram

$$\begin{array}{ccc} R_3 & \xrightarrow{u_2} & R_2 \\ {\scriptstyle u_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r^2_{A_2}} \\ R_1 & \xrightarrow{r^1_{A_2}} & A_2 \\ {\scriptstyle r^1_{A_1}}\downarrow & & \\ A_1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & \\ & \xrightarrow{r^2_{A_3}} & A_3 \\ & & \\ & & \\ & & \end{array}$$

cartesian.

Observation 2.7. In a topoi $\mathscr{E}$ one can consider the category Rel with the same objects as $\mathscr{E}$ and in which the set of morphisms $\mathrm{Rel}(A_1, A_2)$ is the set of relations from A_1 to A_2, since the composition of relations is associative and has the relation $\Delta_A = \langle 1_A, 1_A\rangle : A \hookrightarrow AXA$ as identity of A[5].

Definition 2.8. For a relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $r : R \hookrightarrow AXB$ the morphism $\exists R : P(A) \to P(B)$ is the unique morphism making the diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rel}(?, A) & \xrightarrow{\theta_A} & \mathscr{E}(?, P(A)) \\ {\scriptstyle \mathrm{Rel}(?, R)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{E}(?, \exists R)} \\ \mathrm{Rel}(?, B) & \xrightarrow{\theta_B} & \mathscr{E}(?, P(B)) \end{array}$$

commutative.

Observation 2.9. For an object X and a relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $r : R \hookrightarrow AXB$ in Set we have that $\{\cdot\}_X(x) = \{x\}$ for any $x \in X$, $\vec{R}(a) = \{b \in B / (a, b) \in R\}$, $\overleftarrow{R}(b) = \{a \in A / a, b) \in R\} = \{a \in A / (b, a) \in R^{-1}\}$, $\exists R(X) = \{b \in B / \exists a \in X$ such that $(a, b) \in R\}$ ($\exists R(X)$ is the usual section of the relation R relative to the subset X of the set A).

Proposition 2.10. For any relations $r \in \mathrm{Rel}(A, Y)$, $r : R \hookrightarrow AXY$, $s \in \mathrm{Rel}(X, A)$, $s : S \hookrightarrow XXA$ the equalities of morphisms 1) $\overrightarrow{R \circ S} = \exists R \vec{S}$,

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

2) $\overleftarrow{R \circ S} = \exists S^{-1}\,\overleftarrow{R}$ are true. There exist binary non-homogeneous relations s to A, r from A such that 3) $R \circ \vec{S} = \exists R$, 4) $\overleftarrow{R \circ s} = \exists S^{-1}$.

Proof. The equality 1) follows from the commutativity of the diagram of Definition 2.8. Indeed, we have that $(\mathscr{E}(X, \exists R)\theta_A)(S) = \mathscr{E}(X, \exists R)(\theta_A(S)) = \mathscr{E}(X, \exists R)\vec{S} = \exists R\vec{S}$, $(\theta_Y \mathrm{Rel}(X, R))(S) = \theta_Y \mathrm{Rel}(X, R)(S) = \theta_Y(R \circ S) = \overrightarrow{R \circ S}$. The equality 2) holds using the equality 1) and the properties of inversion [7] : $\overleftarrow{R \circ S} = \overleftarrow{(R \circ S)^{-1}} = \overleftarrow{S^{-1} \circ R^{-1}} = \exists S^{-1}\overleftarrow{R^{-1}} = \exists S^{-1}\overrightarrow{R}$. For the equality 3) one can take s the subobject having the characteristic morphism e_A, that is $s \in \mathrm{Rel}(P(A), A)$, $s : \in_A \rightarrowtail P(A)XA$ and use the equality 1), since $\vec{\in}_A = 1_{P(A)}$. Similarly it obtains the equality 4), taking the relation r the inverse of s, $r \in \mathrm{Rel}(A, P(A))$, $r \in_A \rightarrowtail AXP(A)$ and using the equality 2).

Proposition 2.11. For a relation $r \in \mathrm{Rel}(A, B)$, $r : R \rightarrowtail AXB$ there exist the equalities of morphisms 1) $\vec{R} = \exists R\,\{\cdot\}_A$, 2) $\overleftarrow{R} = \exists R^{-1}\{\cdot\}_B$.

Proof. Using Proposition 2.10 and the fact that $\{\cdot\}_A = \vec{\Delta}_A = \overleftarrow{\Delta}_A$ we obtain respectively the equalities $\exists R\,\{\cdot\}_A = \exists R\vec{\Delta}_A = \overrightarrow{R \circ \Delta_A} = \vec{R}$, $\exists R^{-1}\{\cdot\}_B = \exists R^{-1}\overleftarrow{\Delta}_B = \overleftarrow{\Delta_B \circ R} = \overleftarrow{R}$.

REFERENCES

1. *J. A. Goguen*, Concept Representation in Natural and Artificial Languages : Axioms, Extensions and Applications for Fuzzy Sets. Int. J. Man-Machine Studies, 6, 513 (1974).
2. *N. Popescu, L. Popescu*, Theory of categories. Editura Academiei București, România Sijthoff § Noordhoff International Publishers, 1979.
3. *N. Popescu, A. Radu*, Teoria categoriilor și a fasciculelor. Editura științifică București, 1971.
4. *I. Purdea, Gh. Pic*, Tratat de algebră modernă, vol. I, Editura Academiei Republicii Socialiste România, București, 1977.
5. *Gh. A. Radu*, Teoria toposurilor, vol. I, II. Editura Academiei Republicii Socialiste România, București, 1982.
6. *M. Rebenciuc*, Relații și operații neomogene într-o categorie. Buletinul Institutului Politehnic București, tomul XLVI—XLVII, seria Chimie, anul 1984—1985.
7. *M. Rebenciuc*, On binary non-homogeneous relations in a category (1), (2). Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées (to appear).

Secțiunea unei relații binare neomogene într-o categorie relativ la un subobiect (1)

În această parte a lucrării se definește secțiunea unei relații binare neomogene (relativ la un subobiect) într-o categorie local și colocal mică cu produse și sume directe și descompunere triunghiulară și se arată că se păstrează proprietățile de legătură între luarea secțiunii și incluziune, intersecție (finită) și reuniune (finită).

În final se demonstrează cîteva proprietăți ale unor morfisme în legătură cu o relație binară neomogenă într-un topos obținute prin internalizare și care sînt remarcabile în Ens-categoria mulțimilor.

C.Z.: 517.96

A METHOD FOR FINDING REAL ZEROS OF A FUNCTION USING AN INTERPOLATION SPLINE

L. I. STOICHEV *

In this paper we propose a method for finding the real roots of an equation wich the help of a parabolic or cubic interpolation spline.

The method is applicable for finding the real solutions of nonlinearsystems of of dimension two.

Let a simple real root x_α of the equation :

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

be isolated in the interval $[x_i, x_{i+1}] = \Delta_i$. We suppose that $f(x) \in C^1$ and $f''(x)$ does not change its sign in Δ_i. The root x_α may be approximated with certain error by one of the zeros α_s of the parabolic spline :

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 +$$

$$+ d_i(x - x_i)_+^2, \; x \in [x_i, x_{i+1}], \; \bar{x}_{i+1} = x_{i+1} - \frac{h}{2}, \; x_{i+1} - x_i = h,$$

This spline is such that :

$$S^{(l)}_{(x_i)} = y_i^{(l)}, \; l = 0,1, \; i = \overline{0, n-1}. \tag{2}$$

Using (2) we obtain

$$a_i = y_i, \; b_i = y_i', \; c_i = \frac{2}{h^2}(y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{2h}(y'_{i+1} + 3y'_i),$$

$$d_i = -\frac{2}{h^2}(y_{i+1} - y_i) + \frac{1}{h}(y'_{i+1} + y'_i).$$

* Lecturer, Higher Institute of Chemical Technology, Bulgaria

When $x_\alpha \in [x_{i+1}, x_{i+1}]$ we should take in consideration that $t_+^2 = t^2$ for $t > 0$.

If the function $f(x)$ has an inflection point in the neighbourhood of x_α then the approximation may be done with a cubic spline :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k (x - x_i)^k, \; x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Using (2) we obtain the coefficients :

$$a_0 = y_i, \; a_1 = y_i', \; a_2 = (3\Delta - 2y_i' - y_{i+1}')/h^2,$$

$$a_3 = (-2\Delta + y_i' + y_{i+1}')/h^2, \; \Delta = (y_{i+1} - y_i)/h^2.$$

Denote

$$Q = (3a_1a_3 - a_2^2)/9a_3^2, \; R = (9a, a_2a_3 - 27a_0a_3^2 - 2a_2^3)/54a_3^3,$$

$$L = Q^3 + R^2, \; S = \sqrt[3]{R + \sqrt{L}}, \; T = \sqrt[3]{R - \sqrt{L}}.$$

Then the real zero of the cubic spline is found by one of the formulae :

$$\alpha = x_i + S + T - a_2/3a_3 \text{ if } L \geqslant 0, \text{ or}$$

$$\alpha = x_i - 2\sqrt{-Q} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{R}{\sqrt{-L}}\right) - a_2/3a_3 \text{ if } L < 0.$$

The remaining zeros are roots of the equation

$$b_0 + b_1 t + t^2 = 0$$

where :

$$b_0 = x_3\left(x_3 + \frac{a_2}{a_3}\right) + \frac{a_1}{a_3}, \; b_1 = x_3 + \frac{a_2}{a_3}, \; x - x_i = t.$$

We can approximate the table values (x_i, y_i) : $y_i = f(x_i)$, $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0, n}$ by a cubic spline :

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \; x \in [x_i, x_{i+1}]$$

from class C^2 with the conditions :

$$S(x_i) = y_i, \; S^{(l)}_{(x_i - 0)} = S^{(l)}_{(x_i + 0)}, \; l = 1, 2, \; i = \overline{1, n-1}, \tag{3}$$

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0.$$

From (3) we obtain a system of equations with diagonal predominance :

$$\begin{cases} c_1 = c_{n+1} = 0 \\ c_i + 4c_{i+1} + c_{i+2} = \dfrac{3}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), \ i = \overline{1, n-1} \end{cases} \tag{4}$$

Solving (4) the remaining coefficients are obtained by the formulae :

$$a_i = y_{i-1}, \ b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - \frac{1}{3}h(c_{i+1} - 2c_i),$$

$$b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} - \frac{1}{3}hc_n, \ d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h}, \ i = \overline{1, n-1}$$

Estimates for the approximation error may be :

$$f(x) \in c^2 : R(x) \leqslant \frac{19}{20} h^2\omega(f''), \ f(x) \in c^2c_\Delta^3 : R(x) \leqslant \frac{41}{1728} h^2\omega(f'').$$

The proposed method may be used for finding the real roots of a nonlinear system of equations of second dimension :

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

where f, g are smooth functions of first order. Denote by (x_α, y_α) any real solution of system (5). Forming the interpolation knots in such a way that $x_i < x_\alpha < x_{i+1}$ we construct the splines $S_3(f, a_k)$ and $S_3(g, b_k)$, $x \in \Delta_i$. By nonlocal approximation we get all real solutions. From $S(f, a_k) = S(g, b_k)$ it follows that

$$\sum_{k=0}^{3} (a_k - b_k)(x - x_i)^k = 0, \ x \in [x_i, \ x_{i+1}] \tag{6}$$

i.e. solving of system (5) is reduced to finding of the real root of (6) that is in the interval Δ_i. After that we can construct the iteration process.

Using the method of spline interpolation one may construct a computer program for finding real roots of an equation. In the case of multiple zeros ([2] one may approximate the function $R(x) = f(x)/\mathrm{d}(x)$ where $\mathrm{d}(x) = (f(x), f'(x))$.

Numerical experiment. The real roots of the equation $2x^7 - 12x + 5 = 0$ are in the interval $(-2,2)$ and the intervals Δ_i are $[-1.5,-1.4]$, $[0.4, 0.5]$ and $[1.2, 1.3]$. The equation does not have multiple roots

because $d(x)$ is a constant. In each one of the intervals reducing the step by 10^k, $k = 1, 2, 3$ we construct three splines and the corresponding root is found with 10^{-8} accuracy :

	X_K	$F(x_K)$
1	−1.40631036	.118763648
	−1.40754008	−4.27849591E−06
	−1.40754004	4.09781933E−08
	−1.40754004	−2.79396772E−08
2	·417033595	−1.55419111E−05
	·417032272	2.4586916E−07
	·417032289	3.53902579E−08
	·417032289	4.47034836E−08
3	1.26099636	7.78375753E−03
	1.2608205	−4.78699803E−07
	1.26082051	5.0291419E−08
	1.26082051	1.67638063E−08

REFERENCES

1. *L. Stoichev, G. Milkova,* A method for finding real solutions of algebraic and transcendental equations and systems of equations by interpolation splines. VHTI Reports. Sofia, vol. XXIX (1983), No 4, p. 167–171. (in bulgarian)
2. *L. Kollatz,* Functional analysis and numerical analysis. M. 1969, p. 278.

Metodă pentru determinarea zerourilor reale ale unei funcţii folosind interpolarea Spline

În acest articol se propune o metodă de determinare a rădăcinilor reale ale unei ecuaţii cu ajutorul interpolării spline parabolice sau cubice. Metoda este aplicabilă pentru determinarea soluţiilor reale ale unui sistem neliniar cu dimensiunea doi.

C.Z.: 517.93
536.23

FLUCTUATION SPECTRUM FOR STOCHASTIC IMPULSIONAL PROCESSES

M. STAN *

A stochastic model is presented for the calculation of fluctuation spectrum of any physical quantity which can be represented by an assembly of impulsional processes.

1. Fluctuation Spectrum of a Dynamic Impulsional Quantity

Let be $v(t)$ a dynamic quantity which can be modelated by a stochastic nonstationary impulsional process, in which each transition indicates a collision process**. For $v^k(t)$ recording to the process, we shall choose the origin of time in such a way, that the even collisions should be the begining of the impulses, and the odd ones, their end. In this way we shall distinguish formally the impulses of velocity as well as the pauses between impulses, but we shall consider that both have the same distribution law. Let's consider as known the mean values $\langle v \rangle$ and $\langle v^2 \rangle$, the variance σ, as well as the distribution function P and the characteristic function $\theta_{\Delta t}(\omega)$ for the Δt length of the free path. One also considers that the process is markovian, meaning that all the probabilistic features of impulses don't depend upon the order number of the impulse, while the stochastic characteristic of the two impulses depend only upon the relative position of these impulses.

The main problem consists in computing of the fluctuation spectrum $\varphi(\omega)$, using the above hypotesis.

Because in the general case the process is not stationary, we shall use the Lampard [1] extension of Wiener-Hincin theorem for such processes. The main idea of this generalisation consists in dividing the temporal interval of evolution in small intervals for which the Wiener-Hincin theorem is available in the known form, the total fluctuation spectrum $\varphi(\omega)$ being obtained by an average of the corresponding spectral densities :

$$\varphi(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{2}{T} \langle |F_T^k(\omega)|^2 \rangle, \tag{1}$$

---

* Lecturer, Physics Dept.

** For simplicity we shall refer in the following to the calculation of the fluctuation spectrum for velocity, the results being analogues for other quantities, too.

where

$$F_T^{(k)}(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} v_T^{(k)}(t) e^{-i\omega t}\, dt \tag{2}$$

is the Fourier transform of the truncated recording $v_T^{(k)}(t)$ defined by

$$v_T^{(k)}(t) = \begin{cases} v^{(k)}(t) & \text{for } |t| \leqslant \frac{T}{2} \\ 0 & \text{in rest.} \end{cases} \tag{3}$$

Let be $v(t)$ the deterministic function which describes the velocity evolution between two consecutive collisions, cancelled besides the interval $0 \leqslant t \leqslant 1$. The n order impulse from the k recording will be described by function $\xi_n^{(k)}(t - t_{2n}^{(k)}, t_{2n+1}^{(k)})$, which is cancelled for $t \notin [t_{2n}^{(k)}, t_{2n+1}^{(k)}]$. The impulses of a certain recording can be obtained by multiplying its values with $v_n^{(k)}$, making a translation with $t_{2n}^{(k)}$ along the time axis, and dividing then through $\Delta t_n^{(k)} = t_{2n+1}^{(k)} - t_{2n}^{(k)}$. It results

$$\xi^{(k)}(t - t_{2n}^{(k)}, t_{2n+1}^{(k)}) = v_n^{(k)} v\left(\frac{t - t_{2n}^{(k)}}{\Delta t_n^{(k)}}\right). \tag{4}$$

If we consider $2p + 1$ impulses, the k recording of the process is obtained by adding the relations (4), i.e.

$$\sum_{n=-p}^{+p} \xi_n^{(k)}(t - t_{2n}^{(k)}, t_{2n+1}^{(k)}) = \sum_{n=-p}^{+p} v_n^{(k)} v\left(\frac{t - t_{2n}^{(k)}}{\Delta t_n^{(k)}}\right). \tag{5}$$

The spectral density $F_n^{(k)}(\omega)$ will be the Fourier transform of (5), meaning

$$F_{(\omega)}^{(k)}(\omega) = \sum_{n=-p}^{+p} v_n^{(k)} \int_{t_{2n}^{(k)}}^{t_{2n+1}^{(k)}} v\left(\frac{t - t_{2n}^{(k)}}{\Delta t_n^{(k)}}\right) e^{-i\omega t}\, dt. \tag{6}$$

Putting

$$x = \frac{t - t_{2n}^{(k)}}{\Delta t_n^{(k)}}, \tag{7}$$

the relation (6) becomes

$$F_n^{(k)}(\omega) = \sum_{n=-p}^{+p} v_n^{(k)} \Delta t_n^{(k)} \int_0^1 v(x)\, e^{-i\omega\left[t_{2n}^{(k)} + x\Delta t_n^{(k)}\right]}\, dx \tag{8}$$

and introducing the Fourier transform of $v(x)$:

$$h(\omega) = \int_0^1 v(x)\, e^{-i\omega x}\, dx, \tag{9}$$

one obtain

$$F_n^{(k)} = \sum_{n=-p}^{+p} v_n^{(k)} \Delta t_n^{(k)} h(\omega \Delta t_n^{(k)})\, e^{-i\omega t_{2n}^{(k)}}. \tag{10}$$

The fluctuation spectrum is given by (1). We notice that in the considered case the temporal interval T between the extreme impulses depends upon the impulse number and is a stochastic variable. But taking into account the mean interval τ between two succesive impulses, we have [2, 3, 4]

$$T = 2\,(2p+1)\,\tau + k\sigma\sqrt{2(2p+1)} = 2(2p+1)\,\tau\left(1 + \frac{k\sigma}{\sqrt{2\,(2p+1)}}\right), \tag{11}$$

where σ is the corresponding variance. In this case one can see that for high p, T tends to $2(p+1)\tau$, so that (1) leads to

$$\varphi(\omega) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{(2p+1)\,\tau} \langle |F_n^{(k)}(\omega)|^2 \rangle, \tag{12}$$

that

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\tau} \cdot \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2p+1} \left\langle \left| \sum_{n=-p}^{+p} v_n^{(k)} \Delta t_n^{(k)} h(\omega \Delta t_n^{(k)})\, e^{-i\omega t_{2n}^{(k)}} \right|^2 \right\rangle. \tag{13}$$

Relation (13) can be put in a simpler form, taking into account that

$$\left\langle \left| \sum_{n=-p}^{+p} v_n^{(k)}(t) \Delta t_n^{(k)} h(\omega \Delta t_n^{(k)})\, e^{-i\omega t_{2n}^{(k)}} \right|^2 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{n=-p}^{+p} \sum_{r=-p}^{+p} v_n^{(k)} v_r^{(k)} \Delta t_n^{(k)} \Delta t_r^{(k)} h(\omega \Delta t_n^{(k)}) h^*(\omega \Delta t_r^{(k)})\, e^{-i\omega [\, t_{2n}^{(k)} - t_{2r}^{(k)}]} \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=-p}^{+p} \langle [v_n^{(k)} \Delta t_n^{(k)}]^2 \, | h(\omega \Delta t_n^{(k)}) |^2 \rangle +$$

$$+ \sum_{n=-p}^{+p} \sum_{r=-p}^{+p} \langle v_n^{(k)} v_r^{(k)} \Delta t_n^{(k)} \Delta t_r^{(k)} h(\omega \Delta t_n^{(k)}) h^*(\omega \Delta t_r^{(k)})\, e^{-i\omega [\, t_{2n}^{(k)} - t_{2r}^{(k)}]} \rangle, \tag{14}$$

where $h^*(\omega \Delta t_r^{(k)})$ indicates the complex conjugate.

The process being markovian, the first sum from (14) is independent from n index of impulse, and the double sum depends only upon the difference $l = n - r$ between the indices of two impulses of order n and r. Thus we can introduce the notations :

$$Q(\omega) = \langle [v_n^{(k)} \Delta t_n^{(k)}]^2 | h(\omega \Delta t_n^{(k)}) |^2 \rangle \tag{15}$$

$$N_l(\omega) = \langle v_n^{(k)} v_r^{(k)} \Delta t_n^{(k)} \Delta t_r^{(k)} h(\omega \Delta t_n^{(k)}) h^*(\omega \Delta t_r^{(k)}) \, e^{-i\omega [t_{2n}^{(k)} - t_{2n}^{(k)}]} \rangle \tag{16}$$

so that

$$\sum_{n=-p}^{+p} \langle [v_n^{(k)} \Delta t_n^{(k)}]^2 | h(\omega \Delta t_n^{(k)}) |^2 \rangle = (2p + 1) \, Q(\omega) \tag{17}$$

and

$$\sum_{n=-p}^{+p} \sum_{r=-p}^{+p} N_{n-r}(\omega) = \sum_{l=1}^{2p} (2p + 1 - l)[N_l(\omega) + N_l(-\omega)]. \tag{18}$$

Inserting (17) and (18) in (14) and then the result in (13), we obtain

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\tau} \left\{ Q(\omega) + \lim_{p \to \infty} \sum_{l=1}^{2p} \left(1 - \frac{l}{2p + 1} \right) [N_l(\omega) + N_l(-\omega)] \right. \tag{19}$$

Supposing the sum is convergent, we find

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\tau} \left\{ Q(\omega) + \sum_{l=1}^{\infty} [N_l(\omega) + N_l(-\omega)] \right\}, \tag{20}$$

or

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\tau} \left\{ Q(\omega) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} Re N_l(\omega) \right\}. \tag{21}$$

If $P(x)$ is the distribution function for the free path, (15) may be written under the form

$$Q(\omega) = (\langle v \rangle^2 + \sigma^2) \int_0^{\infty} x^2 | h(\omega x) |^2 \, P(x) \, dx. \tag{22}$$

In order to explain N_l, we shall introduce the stochastic variable

$$\mu_n^{(k)} = t_{2n+2}^{(k)} - t_{2n}^{(k)}, \tag{23}$$

which represents the temporal interval between two successive impulses. The variabile $\mu_n^{(k)}$ is the sum of the stochastic variables : the Δt_n length of

the impulse and the Δt_n^* lenght of the free path, the two stochastic variables having the same probabilistic features.

Under these circumstances (16) may be written :

$$N_l(\omega) = \langle v\rangle^2 \langle \Delta t_n^{(k)} \Delta t_r^{(k)} h(\omega \Delta t_n^{(k)}) h^*(\omega \Delta t_r^{(k)})\, e^{-i\omega \Delta t_r^{(k)} - i\omega \Delta t_n^{(k)} - i\omega \sum_{m=r+1}^{n-1} \mu_m^{(k)}} \rangle \quad (24)$$

where obviously

$$t_{2n}^{(k)} - t_{2(r+1)}^{(k)} = \sum_{m=r+1}^{n-1} \mu_m^{(k)}. \quad (25)$$

Because Δt_n and Δt_n^* are independent, the characteristic function $\theta_\mu(\omega)$ of μ is

$$\theta_\mu(\omega) = \theta_{\Delta t}^2(\omega), \quad (26)$$

where $\theta_{\Delta t}(\omega)$ is the characteristic function common for Δt_n and Δt_n^*. Because $\theta_\mu(\omega)$ is independent of the impulse index, from (24) we obtain

$$N_l(\omega) = \langle v\rangle^2 \theta_\mu^{l-1}(-\omega)\theta_{\Delta t}(\omega) \langle \Delta t_n^{(k)} h(\omega \Delta t_n^{(k)})\rangle \langle \Delta t_r^{(k)} h^*(\omega \Delta t_r)\, e^{-i\omega \Delta t_r^{(k)}} \rangle. \quad (27)$$

The last expression may be written in a simpler form considering that

$$h^*(\omega \Delta t_r^{(k)})\, e^{-i\omega \Delta t_r^{(k)}} = \int_0^1 v(t)\, e^{i\omega \Delta t_r (t-1)} dt = \int_0^1 v(1-x)\, e^{-i\omega \Delta t_r^{(k)} x}\, dx \quad (28)$$

and putting

$$h_1(\omega) = \int_0^1 v(1-x) e^{-i\omega x}\, dx = h(-\omega)\, e^{-i\omega x} \quad (29)$$

$$H(\omega) = \langle \Delta t_n^{(k)} h(\omega \Delta t_n^{(k)})\rangle = \int_0^\infty x h(\omega x)\, P(x)\, dx \quad (30)$$

$$H_1(\omega) = \langle \Delta t_r^{(k)} h_1(\omega \Delta_r^{(k)})\rangle = \int_0^\infty x h_1(\omega x)\, P(x)\, dx, \quad (21)$$

one finds from (27), using (26) :

$$N_l(\omega) = \langle v\rangle^2\, \theta_{\Delta t}^{2l-1}(-\omega) H(\omega)\, H_1(\omega). \quad (32)$$

At last, inserting (22) and (32) in (19), we obtain

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\tau}\left\{(\langle v\rangle^2 + \sigma^2)\int_0^\infty x^2 |\, h(\omega x)\,|^2\, P(x)\, dx + \right. \quad (33)$$

$$\left. + \langle v\rangle^2 \lim_{p\to\infty} \sum_{l=1}^{2p}\left(1 - \frac{l}{2p+1}\right)[H(\omega)H_1(\omega)\theta_{\Delta t}^{2l-1}(-\omega) + H(-\omega)H_1(-\omega)\theta_{\Delta t}^{2l-1}(\omega)]\right\},$$

or

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\tau}\left\{(\langle v\rangle^2 + \sigma^2)\int_0^\infty x^2 |\, h(\omega x)\,|^2\, P(x)\, \mathrm{d}x + \right.$$

$$\left. + 2\langle v\rangle^2\, Re\, [H(-\omega)H_1(-\omega) \lim_{p\to\infty} \sum_{l=1}^{2p}\left(1 - \frac{l}{2p+1}\right)\theta_{\Delta t}^{2l-1}(\omega)\right]\Big\}. \quad (34)$$

If $\omega \neq 0$, we find

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{l=1}^{2p}\left(1 - \frac{l}{2p+1}\right)\theta_{\Delta t}^{2l-1}(\omega) = \frac{\theta_{\Delta t}(\omega)}{1 - \theta_{\Delta t}^2(\omega)}, \quad (35)$$

and if $\omega = 0$ the sum is divergent, but the above limit may be represented by $h^2(0)\,\tau\,\delta(\omega)$, where $\delta(\omega)$ is the Dirac function. So it results the main expression

$$\varphi(\omega) = \frac{\langle v\rangle^2}{\tau}\left\{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\langle v\rangle}\right)^2\right]\int_0^\infty x^2 |h(\omega x)|^2\, P(x)\mathrm{d}x + 2\,Re\,\frac{H(-\omega)H_1(-\omega)}{\theta_{\Delta t}^{-1}(\omega) - \theta_{\Delta t}(\omega)}\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\langle v\rangle^2 h^2(0)\,\delta(\omega). \quad (36)$$

The relation (36) permits the calculation of the fluctuation spectrum of the particles velocity in a classical gas knowing the mean velocity and the variance for a single particle velocity as will as the corresponding characteristic function. In a subsequent paper we shall present some particular cases in some situations of physical interest.

2. Conclusions

The proposed model has the advantage of being simple enough, because it doesn't require a detailed analysis of the collision and scattering mechanisms, but only the introduction of some assumptions of stochastic nature reffering to these processes. It is at the same time, sufficiently general to allow the description of the fluctuations for any physical variable which may be represented by an impulsional process of a known form.

REFERENCES

1. *D. G. Lampard*, J. Appl. Phys. 25 (1954), 6.
2. *B. R. Lévine*, Fondements théorique de la Radiotechnique statistique, Editions Mir, Moscou, tome I, 1973.
3. *B. R. Levine*, Electrosviaz, 1963, Nr. 2.
4. *H. Kaufman, E. H. King*, Trans IRE, 1955, vIT—1.

Spectrul de fluctuație pentru procese stochastice impulsionale

Se prezintă un model stochastic pentru calculul spectrului de fluctuație a oricărei mărimi fizice care poate fi reprezentată printr-un ansamblu de procese impulsionale.

C.Z.: 626.92/.97

CONDIȚII PENTRU BISTABILITATEA OPTICĂ ABSORBTIVĂ ȘI DISPERSIVĂ

P. E. STERIAN, E. N. ȘTEFĂNESCU, I. M. POPESCU *

În lucrare se analizează influența principalilor parametri fizici ai dispozitivelor optice bistabile asupra caracteristicilor de bistabilitate ale acestora, pe baza unui model analitic elaborat de autori în aproximația cîmpului mediu.

1. Introducere

Bistabilitatea optică descoperită de Szoke [1] prezintă o dublă importanță: 1) un dispozitiv optic bistabil reprezintă un exemplu de sistem fizic pentru care poate fi studiat fenomenul de autoorganizare în sistemele neliniare departe de echilibrul termic [2], [3]; 2) performanțele pe care le pot atinge aceste dispozitive utilizate în sistemele de prelucrare optică a informației sînt deosebite [4]: timpi de comutație de ps, energii de comutație de fJ, posibilitatea prelucrării în paralel a unei mari cantități de informație, dimensiunile foarte mici atunci cînd sînt realizate sub formă integrată pe material semiconductor. Ca urmare, în studiul bistabilității optice au fost utilizate două modele fizice distincte funcție de scopul urmărit: 1) cavitatea în inel, fără importanță practică deosebită dar avînd ecuații mult mai simple; 2) cavitatea Fabry-Pérot, de interes practic, dar dificil de studiat, deoarece undele staționare din interiorul cavității formează un „grilaj" de polarizație care absoarbe și reflectă undele electromagnetice. Efectele grilajului de polarizație sînt descrise de ecuațiile lui McCall [5] care pentru cazul cavității Fabry-Pérot au fost rezolvate exact de Carmichael și Hermann [6]. Soluția acestora, deși complet analitică este complicată și greu de aplicat în practică. O soluție analitică, mai puțin exactă decît cea a lui Carmichael și Hermann, dar care ia în considerație toate efectele importante ale propagării undelor electromagnetice într-o cavitate Fabry-Pérot și în același timp este mult mai ușor de utilizat în aplicații, a fost dedusă în [7]. Această soluție, care de fapt implică celelalte tratări aproximative anterioare, este utilizată pentru determinarea influenței parametrilor fizici asupra caracteristicii de bistabilitate.

* Conf. dr. ing.; Cercet.; Prof. dr. ing., catedra Fizică

2. Modelarea teoretică a caracteristicii de bistabilitate

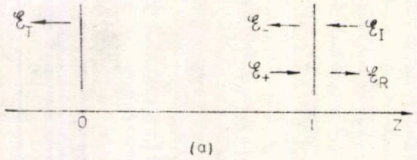


Fig. 1 — Schema de principiu a unui dispozitiv optic bistabill

Se consideră o cavitate Fabry-Pérot optic bistabilă (Fig. 1), de lungime l cu transmisivitatea optică a oglinzilor T şi coeficientul de absorbţie al intensităţii mici α_0. Interacţia radiaţiei electromagnetice cu mediul atomic din cavitate este descrisă de sistemul de ecuaţii Maxwell-Bloch :

$$\dot{\mathscr{E}} + \frac{1}{2}\frac{c}{\eta}\left[\frac{1}{\mathrm{i}k}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial z^2} + (\alpha' - \mathrm{i}k)\,\mathscr{E}\right] = ig\mathscr{S} \tag{1a}$$

$$\dot{\mathscr{S}} + \gamma_\perp(1 - i\delta)\mathscr{S} = \mathrm{i}\frac{p'}{\hbar}N\mathscr{E} \tag{1b}$$

$$\dot{N} + \gamma_{\parallel}(N - \mathscr{N}) = \mathrm{i}\frac{p'}{\hbar}\frac{1}{2}(\mathscr{S}\mathscr{E}^* - \mathscr{S}^*\mathscr{E}) \tag{1c}$$

cu condiţiile la limită

$$\mathscr{E}_+(0, t) = \sqrt{R}\mathscr{E}_-(0, t) \tag{2a}$$

$$\mathscr{E}_+(l, t)\, e^{-\mathrm{i}\Phi} = \sqrt{R}\mathscr{E}_+(l, t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} + \sqrt{T}\mathscr{E}_{\mathrm{I}}(t) \tag{2b}$$

unde $\mathscr{E}$ este amplitudinea cîmpului electric intern, $\mathscr{S}$ polarizaţia electrică, N diferenţa de populaţie avînd la echilibru valoarea $\mathscr{N}$, $\vec{k}$ vectorul de undă, δ — dezacordul atomic, p' momentul electric de dipol, g un coeficient de cuplaj, η — indicele de refracţie, $\gamma_\perp$, $\beta_{\parallel}$ ratele de relaxare atomică transversală şi longitudinală, Ω — dezacordul cavităţii, $R = 1 - T$ reflectanţa oglinzilor, $\mathscr{E}_+$ $\mathscr{E}_-$ amplitudinile cîmpului electric care se propagă în cele două direcţii, pozitivă, respectiv negativă, ale axei.

Notînd cu f şi b amplitudinile cîmpului electric normate la cîmpul electric de saturaţie, sistemul de ecuaţii (1) conduce la sistemul de ecuaţii de tip McCall :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\partial\zeta} - \frac{l\alpha_0(1 + i\delta)}{2}(a_0 f + a_1 b) = 0 \tag{3a}$$

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}} + \frac{l\alpha_0\,(1 + i\delta)}{2}(a_0 f + a_1 b) = 0 \tag{3b}$$

$$(\zeta = z/l)$$

unde

$$a_0 = \frac{1}{1 + (f + b)^2]^{1/2}[1 + (f - b)^2]^{1/2}} \tag{4a}$$

$$a_1 = = \frac{1}{2fb}\left\{1 - \frac{1 + f^2 + b^2}{[1 + (f + b)^2]^{1/2}[1 + (f - b)^2]^{1/2}}\right\} \tag{4b}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (3) cu condițiile la limită (2) se obține următoarea soluție pentru calculul caracteristicii de bistabilitate :

$$y^2 = \frac{1}{T^2}\left[f_1^2 + R^2\frac{x^4}{f_1^2} - 2Rx^2\cos(2\theta - 2\Phi)\right] \tag{5.a}$$

$$\theta = \delta \ln\frac{f_1}{x} \tag{5b}$$

$$(1 + \sqrt{R}\,x^2)\ln\frac{f_1}{x} + \frac{1}{2}(f^2 - x^2) + \frac{Rx^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{f_1^2}\right) = \frac{\alpha_0 l}{2} \tag{5c}$$

pentru ramura de transmisie mică ;

$$\ln\frac{f_1}{x} = \frac{\alpha_0 l}{4\sqrt{R}x^2} = \frac{\alpha_0 l/2}{(1+R)x^2} \tag{5.d}$$

pentru ramura de transmisie mare.

În aproximația cîmpului mediu, expresia (5a) devine :

$$y^2 = x^2\left\{\frac{1}{T^2}[1 + R^2 - 2R\cos(2\theta - 2\Phi)] + 2(1+R)\frac{\Delta}{T} + (1+3R^2)\frac{\Delta^2}{T^2}\right\} \tag{6}$$

iar din expresiile (5c) respectiv (5d) se obțin expresiile :

$$\Delta = \Delta' = \frac{\alpha_0 l/2}{1 + (1 + R + \sqrt{R})x^2} \tag{7a}$$

respectiv

$$\Delta = \Delta'' = \frac{\alpha_0 l/2}{1 + (1 + R + \sqrt{R})x^2} \tag{7.b}$$

În cazul unui dezacord atomic mic $\theta \ll 1$, din expresiile (6) și (7) se obțin expresiile aproximative deduse anterior de Carmichael și Hermann :

$$y^2 = x^2\left[\left(1 + \frac{4C}{1+3x^2}\right)^2 + \left(\frac{4C\delta}{1-3x^2} - \varphi\right)^2\right], \tag{8a}$$

$\varphi = 2\Phi/T$ și respectiv de Agrawal și Carmichael :

$$y^2 = x^2\left[\left(1 + \frac{4C}{1+2x^2}\right)^2 + \left(\frac{4C\delta}{1+2x^2} - \varphi\right)^2\right] \tag{7b}$$

unde $C = \alpha_0 l/4T$ este factorul de cooperativitate al lui Bonifacio.

3. Analiza condițiilor de bistabilitate

Din expresiile (8) se observă că bistabilitatea optică poate fi pur absorbtivă în cazul unui acord atomic perfect $\delta = 0$, dar nu poate fi pur dispersivă deoarece $C\delta \neq 0$ implică $C \neq 0$, deci un anumit caracter absorbtiv există întotdeauna. În fig. 2 este reprezentată o familie de caracteristici în cazul bistabilității pur absorbtive iar în fig. 3 o familie de caracteristici pentru cazul bistabilității dominant-dispersive. Se observă că în al doilea caz ramura superioară este mult mai apropiată de prima bisectoare, situație mult mai avantajoasă din punct de vedere practic. Fig. 4 și 5 în comparație cu fig. 2 ilustrează influența coeficientului de absorbție asupra ciclului histerezis. Din fig. 4 se observă că pentru $C = 10$ pînă la valori $\alpha_0 l \simeq 4$ ciclul histerezis este micșorat cu aproximativ 10% în timp ce din fig. 5 se observă că pentru aceeași valoare a lui C, dar $\alpha_0 l = 20$ ciclul histerezis dispare complet. În fig. 6 este prezentată influența dezacordului cavității care micșorează considerabil atît transmitanța pe ramura superioară cît și ciclul histerezis. Din fig. 7 rezultă influența dezacordului atomic a cărui creștere conduce la creșterea pragului superior și în același timp pentru valori suficient de mari conduce la apariția unor cicluri histerezis suplimentare datorită acordurilor succesive ale cavității.

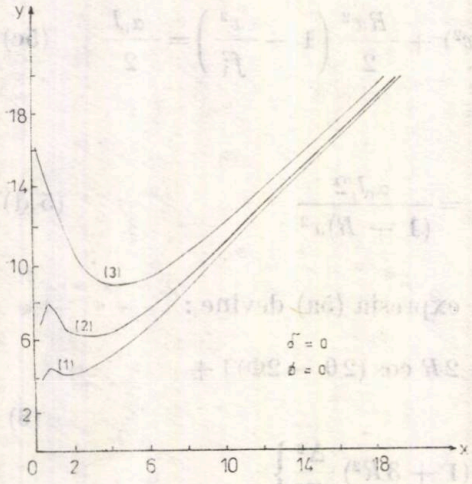


Fig. 2 — Caracteristici de bistabilitate pur absorbtivă :

$T = 0{,}01$; (1) $\alpha_0 l = 0{,}1$; (2) $\alpha_0 l = 0{,}2$;

(3) $\alpha_0 l = 0{,}4$.

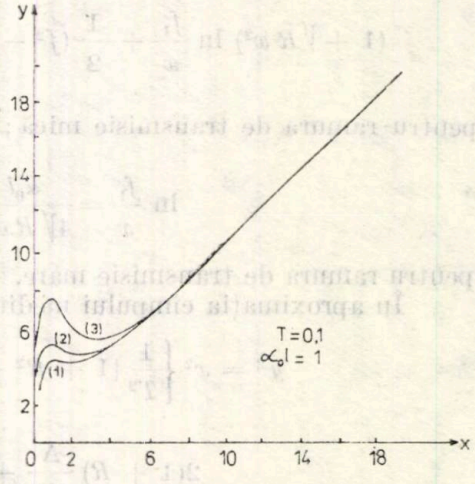


Fig. 3 — Caracteristici de bistabilitate dominant-dispersivă :

$\alpha_0 l = 1$, $T = 0{,}1$ $\Phi = 0$;

(1) $\delta = 0{,}5$; (2) $\delta = 1$; (3) $\delta = 2$.

Influența absorbției în cazul dominant dispersiv este prezentată în fig. 3 : se constată că în acest caz chiar valori mult mai mici decît 1 ale coeficientului de absorbție afectează caracteristica de bistabilitate. Formulări explicite pentru condițiile de bistabilitate pot fi obținute pentru

cazul unui dezacord atomic mic, din expresiile (8). Astfel, pentru cazul pur absorbtiv se obține condiția de bistabilitate

$$\frac{(2C-1)^3}{C(1+\varphi^2)} > \frac{27}{2} \tag{9}$$

și expresiile analitice pentru cele două praguri

$$Y_M = X_M\left[\left(1+\frac{4C}{1+X_M}\right)^2+\varphi^2\right] = 3y_M^2 \tag{10a}$$

$$Y_m = X_m\left[\left(1+\frac{4C}{1+X_m}\right)^2+\varphi^2\right] \simeq \begin{cases} 2y_m^2, & x_m \gg 1 \\ 3y_m^2, & x_m \sim 1 \end{cases} \tag{10b}$$

unde

$$X_M = \frac{4\sqrt{2}}{3}\left[\frac{C(2C-1)}{1+\varphi^2}\right]^{1/2}\cos\frac{\psi+4\pi}{3} - 1 \simeq 3x_M^2 \tag{11a}$$

$$X_m = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left[\frac{C(2C-1)}{1+\varphi^2}\right]^{1/2}\cos\frac{\psi}{3} - 1 \begin{cases} 2x_m^2, & x_m \gg 1 \\ 3x_m^2, & x_m \sim 1 \end{cases} \tag{11b}$$

$$\cos\psi = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{C(1+\varphi^2)^{1/2}}{(2C-1)^3} \tag{11c}$$

Pentru cazul pur dispersiv condiția de bistabilitate este de forma

$$C\delta > -\frac{\varphi}{2}+\frac{3}{2}(1+\varphi^2)^{1/2}\cos\frac{\psi}{3} \tag{12a}$$

$$C\delta < -\frac{\varphi}{2}+\frac{3}{2}(1+\varphi^2)^{1/2}\cos\frac{\psi+2\pi}{3} \tag{12b}$$

unde

$$\psi = \arccos\left(-\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\right), \tag{12c}$$

iar expresiile celor două praguri sînt următoarele :

$$Y_M = X_M\left[1+\left(\frac{4C\delta}{1+X_M}\right)^2\right] \simeq 3y_M^2 \tag{13a}$$

$$Y_m = X_m\left[1+\left(\frac{4C\delta}{1+X_m}\right)^2\right] \simeq \begin{cases} 2y_m^2, & x_m \gg 1 \\ 3y_m^2, & x_m \sim 1 \end{cases} \tag{13b}$$

unde

$$X_M = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left[\frac{C\delta(2C\delta+\varphi)}{1+\varphi^2}\right]^{1/2}\cos\frac{\psi+4\pi}{3} - 1 \simeq 3x_M^2 \qquad (14a)$$

$$X_m = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{C\delta(2C\delta+\varphi)}{1+\varphi^2}\cos\frac{\psi}{3} - 1 \simeq \begin{cases} 2x_m^2, & x_m \gg 1 \\ 3x_m^2, & x_m \sim 1 \end{cases} \qquad (14b)$$

$$\cos\psi = -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{[C\delta(1+\varphi^2)^{1/2}}{(2C\delta+\varphi)^{4/2}} \qquad (15)$$

Concluzii

În lucrare se analizează influența principalilor parametri fizici $\alpha_0 l$ T, δ, ψ, asupra caracteristicii de bistabilitate. Spre deosebire de studiile similare apărute pînă în prezent în literatură [8], [9] s-a utilizat un model analitic al autorilor care să ia în considerare mai complet fenomenele de propagare a undelor electromagnetice în cavitățile Fabry-Pérot, în aproximația cîmpului mediu.

BIBLIOGRAFIE

1. *A. Szoke, V. Daneu, J. Goldhar, N. A. Kurnit*, Appl. Phys. Lett. 15 (1969), 376
2. *E. Benza, L.A. Lugiato*, Z. Physik B, *35* 383 (1979)
3. *E.M. Ștefănescu P. E. Sterian, I. M. Popescu*, Europhysics Conference „Trends in Quantum Electronics", Bucharest, Romania, 2—6 sept. 1985
4. „Optical Bistability", Proceedings of the International Conference on Optical Bistability June 1980, eds : C. M. Bowden, M. Cistan and W. R. Robl., Plenum (1981).
5. *S. L. McCall, H. M. Gibbs*, Opt. Commun., 33 (1980), 335.
6. *W. J. Carmichael, J. A. Hermann*, Z. Physik, B, 38 (*P*980), 365.
7. *E. N. Ștefănescu, I. M. Popescu, P. E. Sterian*, Rev. Roum. Phys., Tome 29, No 2, p. p. 183—188, Bucharest, 1984.
8. *R. Bonifacio, L. A. Lugiato*, „Theory of optical bistability" in Topics in Current Physics, Vol. 27, Springer (1982), p. 61.
9. *L. A. Lugiato* „„Theory of optical bistability" in Progress on Optics, Vol. 21, p. 69 (1984)

Operation Conditions for the Absorptive and Dispersive Optical Bistability

In the paper we analyse the influence of the most important parameters of the optical bistable devices on the bistability characteristics, using an analytical model elaborated by the authors in the mean field aproximation.

C.Z. :621.3.015.
532.537.52

CORONA INCEPTION GRADIENT AND THE DELAY TIME OF THE ONSET CORONA AROUND CONDUCTORS

C. GARY, G. DRĂGAN, I. LUNGU *

This paper presents the determination of the inception intensity of the electric field and of the inception time of the impulse corona discharge around the single and bundled conductors, regarding these values as functions of the amplitude and polarity of the applied impulse voltage too.

The above mentioned values have been determined analysing the experimental data and the charge-voltage curve as obtained in the realm of the EdF (France) — MEE, IPB (Roumania) scientific cooperation.

1. Introduction

Within the technical-scientific collaboration between E.d.F., (France and I.P.B. — M.E.E. (Roumania), concerning the propagation of voltage waves on electric lines where looses are occuring, numerous experiments were made in laboratory, on single conductors (four types) and on bundle conductors (bundle of two, three and four conductors), on an electric line of 220 kV as well.

Among other aspects, these experiments led to a generalized equation which determines the characteristic charge-voltage of the corona impulse discharge around conductors.

2. The Determination of the Generalised Equation of the Charge-Voltage Characteristic

The experiments made recorded the characteristic charge-voltage of the corona impulse discharge of the following types of conductors :

— single conductors with a diameter of 0.010 m ; 0.016 m ; 0.031 m and 0.065 m ;

— bundle conductors (boundles of two, three and four conductors) with a diameter of 0.031 m ; the span between the conductors is of 0.4 m.

The applied impulse voltage, of positive and negative polarity, in four-five steps (their minimum value immediately below the corona level) was of

* Eng., EdF, ; Prof. Ph. D. ; Eng., Chair of Power Stations and Electrical Neworks

1.2/50 μs, 16/80 μs, or, in some cases, of 10/100 μs., 14/170 μs; for three or four bundled conductors also, of 250/2500 μs.

The determination of the dependence of the charge q as a function of the voltage u took into account the fact that for $u < U_0$ the dependence was linear, and for $u > U_0$ it became nonlinear, where U_0 represents the critical voltage determined by Peek's relation. We notice that applying the „least squares method" to different types of analytical representations leading to the best concordance with the experimental data has the following shape :

$$q = C_0 U_0 \left(\frac{u}{U_0} \right)^B \tag{1}$$

where C_0 represents the geometrical capacity of the conductor, and is a factor whose values, for waves with a front duration within 1 μs and 20 μs are given in Table 1.

Table 1

Type of conductor	Polarity	
	Positive	Negative
Single conductor	$2.643 d_0^{0,153}$	$1.21+3.4 d_0$
Bundled conbuctor	$1.3+0.03n$	$0.95 n^{0.2}$

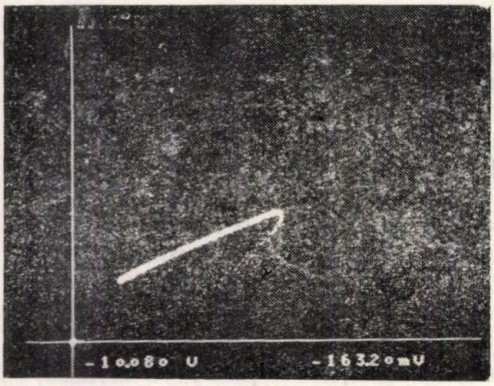


Fig. 1 — The experimentally characteristic $q = f(u)$ for 31mm diameter conductor

In table 1, d_0 stands for the diameter of the conductor, in m and n is the number of bundled conductors.

Fig. 1 shows the experimentally achieved $q = f(u)$ characteristics for 31 mm diameter conductor.

3. Impulse Corona Inception Gradient Around Conductors

The corona onset voltage has been defined as the intersection of the linear part given by the relation $q = C_0 u$ and the nonlinear part of the characteristic $q = f(u)$. Function of the onset voltage we can determine the impulse corona inception gradient.

To generalise the achieved results we use the $\frac{E_c}{E_0}$ ratio, where E_0 represents the gradient critical voltage determined by Peek's relation and E_c is the corona inception gradient. Regarding the corona inception gradient we established curves and calculus relations using the least squares method.

Fig. 2 shows the dependence of $\frac{E_c}{E_0}$ ratio, value as a function of the $\frac{U_{max}}{U_0}$ ratio value, for single conductors, considering the applied impulse voltage (1.2/50 μs and 16/80 μs) of positive and negative polarity.

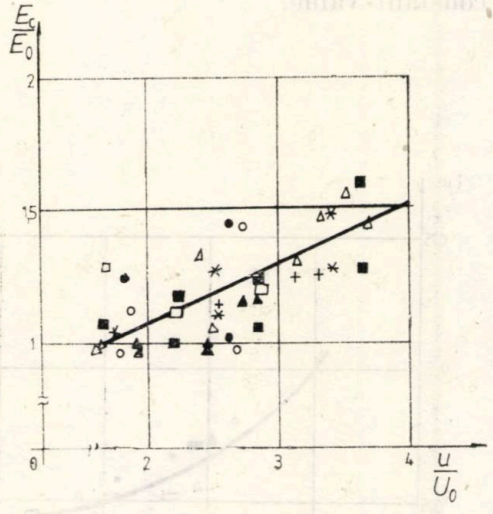


Fig. 2 — The dependence of $\frac{Ec}{Eo}$ ratio value as a function of the $\frac{U_{max}}{U_0}$ ratio value, for single conductors; the applied impulse voltage was ± 1.2/50μs and ± 16/80 μs

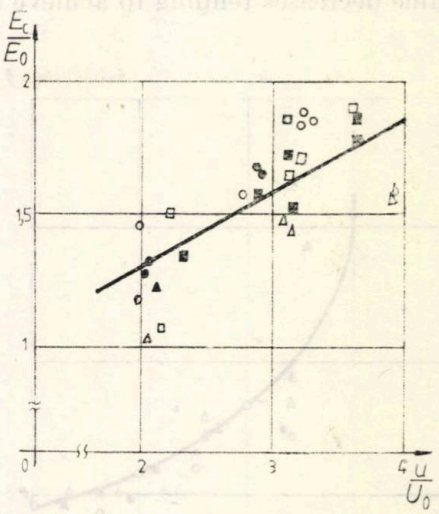


Fig. 3 — The dependence of $\frac{Ec}{Eo}$ ratio value as a function of the $\frac{U_{max}}{U_0}$ ratio value, for 2, 3 and 4 bundled conductors; the applied impuls voltage was ± 1.2/50 μs and ± 10/100 μs.

Fig. 3 shows the same dependence for 2,3 and 4 bundled conductors. We notice that the voltage polarity has practically no influence on the corona inception gradient value.

We draw the conclusion that the values of E_c and U_{max} rated to the reference E_0, respectively to U_0, are in linear dependence; for this reason the introduction of the ratio values represents a great advantage.

The dependence of the $\frac{E_c}{E_0}$ ratio value as a function of the $\frac{U_{max}}{U_0}$ ratio value can be expressed by the following equations:

— for single conductors $E_c/E_0 = 0.62 + 0.22\ (u/U_0)$

— for bundled conductors $E_c/E_0 = 0.7 + 0.3\ (u/U_0)$

As a conclusion for both situations (single and bundled conductors) it corned out that for the impulse wave range having the front duration between 1 μs and 20 μs the corona inception gradient suffers little influence from the wave shape. Also the charge-voltage characteristics are, practically independent from the wave shape for the mentioned from duration (between 1 μs and 20 μs).

4. Corona Onset Time

Fig. 4 shows the dependence of the corona onset time around single conductors as a function of the $\frac{U_{max}}{U_0}$ ratio values for 1.2/50 μs wave voltage.

We notice that with the increase of amplitude, the corona onset time decreases tending to achieve a constant value.

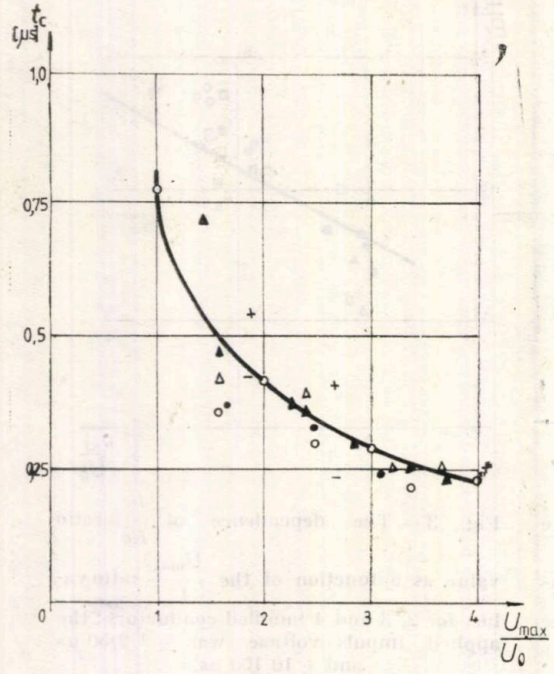


Fig. 4 — The dependence of the corona onset time (t_c) around single conductors as a function of the $\frac{U_{max}}{U_0}$ ratio value, for 1.2/50 μs impulse voltage.

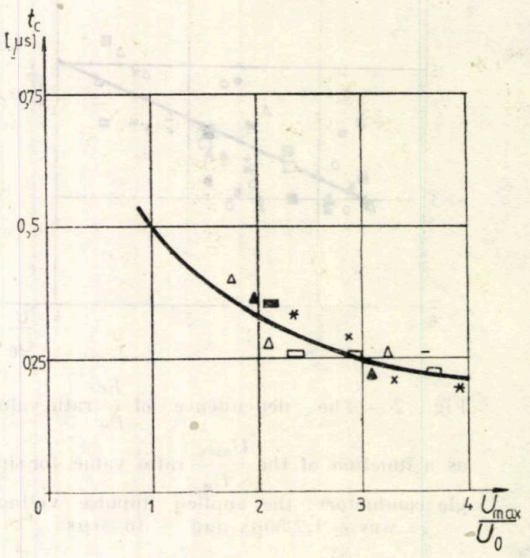


Fig. 5 — The dependence of the corona onset time (t_c) for 2, 3 and 4 bundled conductor as a function of the $\frac{U_{max}}{U_0}$ ratio value for 1.2/50 μs impulse voltage.

For the 1.2/50 μs impulse wave and for conductors with diameter of 10 mm — 65 mm having $\frac{U_{max}}{U_0}$ ratio values between 1 and 6, the t_c values are between 0.2 μs and 0.8 μs.

The analysis of the experimental results enables us to draw the dependence of the corona onset time t_c around conductors on the $\frac{U_{max}}{U_0}$ ratio values :

$$t_c = 0.85 \left(\frac{U_{max}}{U_0} \right)^{-0.86}$$

U_{max} — represents the impulse voltage amplitude ;

t_c — represents the corona onset time μs.

Fig. 5 shows the dependence of corona onset time t_c on the U_{max}/U_0 ratio value for 1.2/50 μs wave in case of bundled conductors.

The t_c dependence on $\frac{U_{max}}{U_0}$ ratio values can also be expressed by the following equation :

$$t_c = 0.48\left(\frac{U_{max}}{U_0}\right)^{-0.6}$$

We notice that the corona onset time for bundled conductors doesn't depend on the conductors number of a bundle or on the voltage polarity too.

Based on experimental results regarding the charge-voltage characteristic of the impulse corona around conductors, the inception intensity of the electric field and the corona inception voltage have been determined.

In the same time, the dependence of these values on the applied impulse voltage amplitude and its polarity and on conductor type (single on bundled) has been established.

The results obtained in the present paper have a new character and are useful for a better understanding of some physical aspects of the impulse corona around conductors.

REFERENCES

1. *C. Gary, G. Drăgan, D. Cristescu*, Atténuation de propagation des surtensions sous l'influence de l'effet de couronne. Rap. CIGRE, Paris, 1978.
2. *C. Gary, G. Drăgan, I. Lungu*, The charge — voltage characteristic of the impulse corona discharge. The deformation of the voltages waves on propagation along on electric transmission line. WG 33—01, CIGRE, Paris, 1984.
3. *C. Gary, G. Drăgan, I. Lungu*, — Asupra tensiunii și timpului de apariție a descărcării corona — Conferința de Energetică, București, 1986.

Determinarea intensității inițiale a cîmpului electric și a timpului de apariție a descărcării corona de impuls în jurul conductoarelor

Lucrarea prezintă determinarea intensității inițiale a cîmpului electric și a timpului de apariție a descărcării corona de impuls în jurul conductoarelor simple și jumelate precum și dependența acestora funcție de amplitudinea și polaritatea tensiunii de impuls aplicate. Determinarea mărimilor menționate s-a făcut pe baza analizei datelor experimentale referitoare la caracteristica tensiune-sarcină obținute în cadrul colaborării dintre EdF (Franța) și MEE— IPB.

C.Z. :510.5
519.85

OPTIMIZAREA CONDUCERII SISTEMELOR FLEXIBILE DE FABRICAȚIE

S. CĂLIN *

În lucrare este prezentată o metodologie de optimizare a conducerii sistemelor flexibile de fabricație prin intermediul rețelelor Petri temporizate. Importanța alegerii structurii modelului pentru obținerea soluției optime este subliniată cu pregnanță și ilustrată prin intermediul unor exemple.

1. Subsistemul considerat

Sistemele flexibile de fabricație (SFF) conțin subsisteme formate din mașini unelte deservite de manipulatoare sau de roboți industriali. În [1] este modelată — prin intermediul unei rețele Petri — conducerea unui asemenea subsistem avînd două mașini unelte servite de un manipulator pentru încărcarea pieselor neprelucrate și descărcarea pieselor prelucrate; proprietățile subsistemului — stabilite prin determinarea invarianților rețelei — sînt verificate prin simulare, fiind folosită rețeaua Petri din figura 1, în care: poziția p_1 modelează condiția mașina unealtă MU_1 este liberă", p_2 — condiția „MU_2 este liberă", p_3 — condiția „manipulatorul MN se găsește în poziția centrală", simetrică în raport cu cele două mașini unelte, p_4 — condiția „MU_1 prelucrează", p_5 — condiția „MN se găsește în una din pozițiile laterale", lîngă MU_1 sau MU_2, p_6 — condiția „MU_2 prelucrează", p_7 — condiția „MU_1 este oprită", p_8 — condiția „MU_2 este oprită"; tranziția t_1 modelează evenimentul „încărcarea MU_1", t_2 — evenimentul „revenirea MN în poziția centrală", t_3 — evenimentul „încărcarea MU_2", t_4 — evenimentul „MU_1 a încheiat prelucrarea", t_5 — evenimentul „MU_2 a încheiat prelucrarea", t_6 — evenimentul „descărcarea MU_1", t_7 — evenimentul „descărcarea MU_2".

Determinarea invarianților I prin relația

$$I^T = C = 0 \tag{1}$$

* Prof. dr. ing., catedra Automatică

— unde C este matricea de incidență [1, 2] — permite stabilirea proprietăților rețelei, definite de ecuațiile

$$m(p_1) + m(p_4) + m(p_7) = 1$$
$$m(p_2) + m(p_5) = 1 \qquad (2)$$
$$m(p_3) + m(p_6) + m(p_8) = 1$$

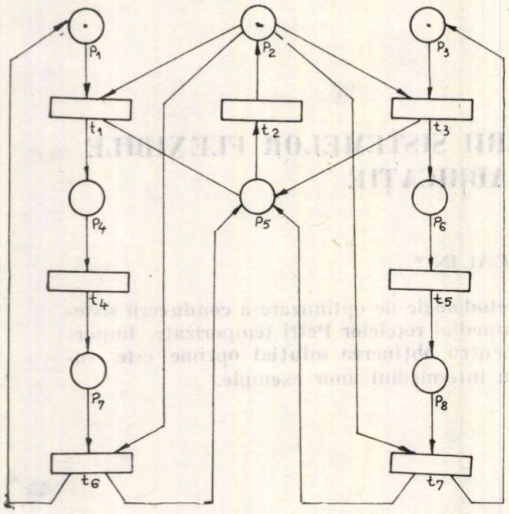


Fig. 1

unde $m(p_i)$ este marcajul poziției p_i. Din (2) rezultă că pe fiecare din cele trei trasee verticale ale rețelei din figura 1 se găsește în permanență cîte un punct de marcaj și prin inspecția rețelei se constată că pentru marcajul inițial M_0 din desen — respectiv pentru

$$M_0^T = [1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \qquad (3)$$

— rețeaua este viabilă, sigură, conservativă și reinițializabilă, fiind asigurată o funcționare periodică.

Pentru atașarea unor temporizări diferitelor poziții și obținerea unei rețele Petri temporizate este indicată stabilirea unei scheme în care să apară explicit condițiile „MN cu piesa neprelucrată", „MN liber", „MN cu piesa prelucrată" și evenimentele „MN apucă piesa neprelucrată", „MN evacuează piesa prelucrată". O asemenea schemă este reprezentată în figura 2, pozițiile p_2, p_5, p_7 și tranzițiile t_2, t_4 corespunzînd condițiilor și evenimentelor suplimentare menționate; în raport cu varianta din figura 1 a fost efectuată și comprimarea ansamblului p_4, t_4, p_7 și a ansamblului p_6, t_5, p_8, acestea fiind înlocuite în figura 2 cu p_4 („MU_1 prelucrează și se oprește") și p_6 („MU_2 prelucrează și se oprește"), rezultînd o schimbare corespunzătoare a numerotării pozițiilor și tranzițiilor.

Determinarea invarianților conduce la relații similare cu (2), deci un punct de marcaj există în permanență pe fiecare din cele trei trasee verticale, dar inspecția schemei din figura 2 arată că această schemă nu mai este viabilă, întrucît pentru marcajul

$$M^T = [0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0] \qquad (4)$$

— accesibil din M_0 indicat în (3) — rețeaua este blocată. Blocajul este determinat de faptul că există posibilitatea ca MN să apuce piesa neprelucrată atunci cînd mașinile unelte MU_1 și MU_2 efectuează operații de prelucrare și ca urmare MN nu mai poate descărca mașinile unelte.

Pentru asigurarea viabilității se poate separa tranziția t_2 (fig. 2) în tranzițiile t_2 și t_3 („MN apucă piesa neprelucrată pentru încărcare pe

MU_1" și „MN apucă piesa neprelucrată pentru încărcare pe MU_2", conform figurii 3, cu renumerotarea tranzițiilor), fiind introduse buclele elementare dintre p_1 și t_2 și dintre p_3 și t_3. În acest mod MN poate apuca o piesă nouă numai dacă există o mașină unealtă liberă și deci blocajul nu mai este posibil, fiind executabilă tranziția aferentă încărcării mașinii unelte libere.

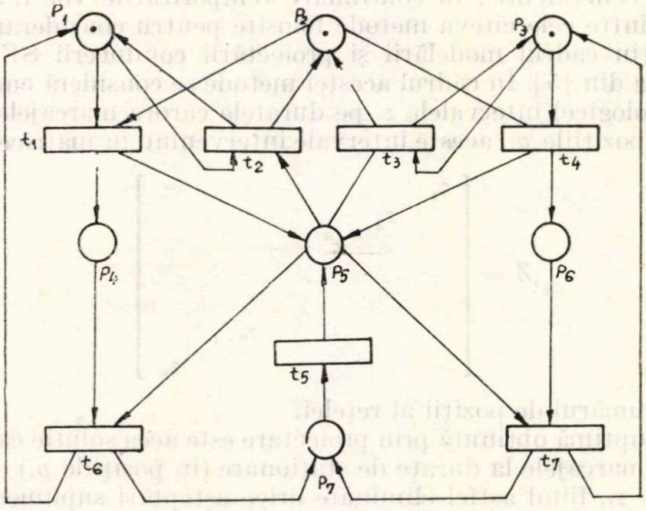


Fig. 2

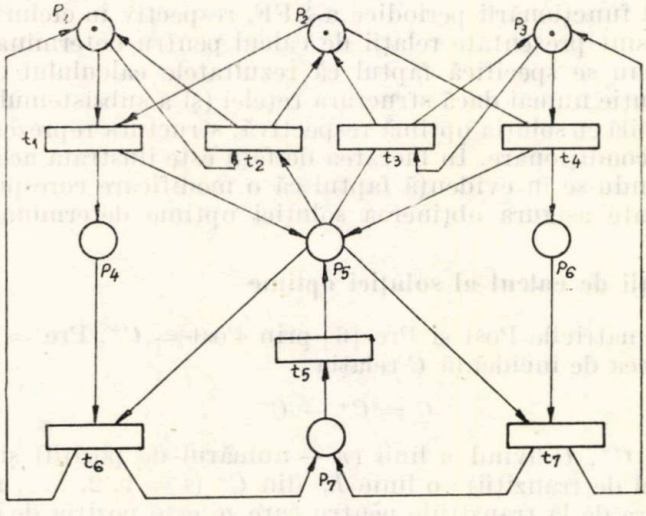


Fig. 3

2. Trecerea la rețeaua temporizată

Introducerea și considerarea parametrului timp în cadrul modelării conducerii SFF are o importanță deosebită, întrucît numai pe această cale pot fi stabilite și comparate vitezele de funcționare ale elementelor com-

ponente și poate fi obținută o soluție optimă în proiectare (respectiv soluția care asigură productivitatea maximă); de asemenea, prin intermediul rețelelor temporizate pot fi avute în vedere anumite restricții sau/și priorități impuse eventual fabricației unor produse.

Temporizările pot fi asociate unor poziții sau unor tranziții, rezultînd scheme echivalente; în continuare temporizările vor fi asociate pozițiilor, iar dintre cele cîteva metode folosite pentru considerarea parametrului timp (în cadrul modelării și proiectării conducerii SFF) [3, 4, 5] este aleasă cea din [5]. În cadrul acestei metode se consideră cunoscute (din condiții tehnologice) intervalele z_i pe duratele cărora marcajele trebuie să staționeze în pozițiile p_i, aceste intervale intervenind în matricea diagonală

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & & & & \\ & z_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & z_{n-1} & \\ & & & & z_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

unde n este numărul de poziții al rețelei.

Soluția optimă obținută prin proiectare este acea soluție care conduce pentru toate marcajele la durate de staționare (în pozițiile p_i) egale numai cu intervalele z_i, fiind astfel eliminate orice așteptări suplimentare — determinate de așteptarea sosirii altui marcaj, necesar executării unei tranziții — și rezultînd productivitatea maximă, care are o importanță esențială în cazul funcționării periodice a SFF, respectiv în cicluri repetitive.

În [5] sînt prezentate relații de calcul pentru determinarea soluției optime, dar nu se specifică faptul că rezultatele calculului conduc la o asemenea soluție numai dacă structura rețelei (și a subsistemului modelat) este compatibilă cu soluția optimă respectivă, structura reprezentînd astfel un factor de condiționare. În lucrarea de față este ilustrată această condiționare, punîndu-se în evidență faptul că o modificare corespunzătoare a structurii poate asigura obținerea soluției optime determinate analitic.

3. Relații de calcul al soluției optime

Notînd matricile Post și Pre [6] prin Post $= C^+$, Pre $= C^-$, rezultă pentru matricea de incidență C relația

$$C = C^+ - C^- \tag{6}$$

matricile C^+, C^-, C avînd n linii (n — numărul de poziții) și m coloane (m — numărul de tranziții); o linie L_i^+ din C^+ ($i = 1, 2, \ldots, n$) definește arcele de sosire de la tranzițiile pentru care p_i este poziția de ieșire și deci implicit poate defini — după cum va rezulta ulterior din relația (24) — frecvența medie a sosirii marcajelor în poziția p_i.

Notînd cu θ variabila timp, cu θ_0 momentul la care are loc marcajul inițial $M(\theta_0) = M_0$ și prescurtînd notațiile prin $m(p_i) = m_i$ se introduce vectorul evoluției în timp a marcajelor

$$M(\theta)^T = [m_1(\theta)\ \ m_2(\theta)\ \ \ldots\ \ m_n(\theta)] \tag{7}$$

Pornind de la relația de calcul al unui nou marcaj M_{q+1}, obținut din M_q prin executarea tranziției t_k[2], respectiv de la relația

$$M_{q+1} = M_q + \text{col}_{t_k} C, \tag{8}$$

se poate introduce vectorul E_k, cu componentele $e(t_1) \equiv e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots, e_m$ având valorile $e_k = 1$, $e_1 = e_2 = \ldots = e_{k-1} = e_{k+1} = \ldots = e_m = 0$, vector care poate defini executarea tranziției t_k, întrucît are loc relația

$$CE_k = \text{col}_{t_k} C \tag{9}$$

În mod similar, pentru o secvență s de tranziții executabile, de exemplu $s = t_1\, t_2\, t_3$, cu evoluția marcajelor

$$M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} M_2 \xrightarrow{t_3} M_3 \tag{10}$$

— rezultînd

$$M_1 = M_0 + \text{col}_{t_1} C$$

$$M_2 = M_1 + \text{col}_{t_2} C = M_0 + \text{col}_{t_1} C + \text{col}_{t_2} C \tag{11}$$

$$M_3 = M_2 + \text{col}_{t_3} C = M_0 + \text{col}_{t_1} C + \text{col}_{t_2} C + \text{col}_{t_3} C$$

— se poate introduce vectorul E_s al executării secvenței, vector de forma

$$E_s^T = [1\ 1\ 1\ 0\ \ldots\ 0] \tag{12}$$

care conduce la relația

$$M_3 = M_0 + CE_s \tag{13}$$

(cu observația că vectorul E_s nu poate indica ordinea executării tranzițiilor).

Ca urmare se obține o relație generală de forma

$$M = M_0 + CE \tag{14}$$

vectorul E reflectînd secvența de tranziții (fără precizarea ordinii) executate între marcajele M_0 și M.

Introducînd și variabila timp θ, relația (14) capătă aspectul

$$M(\theta) = M(\theta_0) + CE(\theta) = M_0 + CE(\theta) \tag{15}$$

unde $E(\theta)$ reprezintă vectorul care reflectă executarea tranzițiilor.

Considerînd intervalul

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 \neq 0 \tag{16}$$

și notînd

$$M(\theta) - M(\theta_0) = \Delta M(\theta) \tag{17}$$

din (15), (16), (17), se obține

$$\frac{\Delta M(\theta)}{\Delta \theta} = \frac{M(\theta) - M(\theta_0)}{\Delta \theta} = C\frac{E(\theta)}{\Delta \theta} = CF(\theta) \tag{18}$$

unde vectorul $\frac{\Delta M(\theta)}{\Delta \theta}$ reflectă variația medie a numărului simbolurilor de marcaj în intervalul $\Delta\theta$, iar vectorul m-dimensional $F(\theta)$ are componente $f_j(\theta)$ care reprezintă frecvența medie de executare a tranziției t_j în intervalul $\Delta\theta$.

Considerînd rețeaua reinițializabilă și deci sistemul funcționînd în regim periodic, cu cicluri repetitive, după trecerea unui ciclu (respectiv după o perioadă) va rezulta

$$M(\theta) = M_0 \tag{19}$$

și

$$\frac{\Delta M(\theta)}{\Delta(\theta)} = 0 \tag{20}$$

deci

$$CF(\theta) = 0 \tag{21}$$

conform cu (18).

Considerînd că frecvențele de executare a tranzițiilor sînt constante, relația (21) capătă forma

$$CF = 0 \tag{22}$$

care permite determinarea vectorului F (sau a unor dependențe între componentele acestuia, în cazul cînd rangul matricii C este mai mic decît n).

Pentru o valoare medie a vectorului $M(\theta)$, notată prin $\bar{M}(\theta)$, proprietățile invarianțiior I conduc la relația

$$I^T \bar{M}(\theta) = I^T M_0 \tag{23}$$

și notînd cu $\bar{m}_i(\theta)$ valoarea medie a marcajului unei poziții p_i se obține condiția

$$\bar{m}_i(\theta) \geqslant z_i L_i^+ F \tag{24}$$

unde $L_i^+ F$ definește frecvența medie a sosirii marcajelor în poziția p_i, iar z_i este intervalul de timp din diagonala matricei Z din (5); produsul dintre frevcență și interval de timp — din membrul drept al relației (24) — reprezintă număr de marcaje.

Valoarea $\bar{M}(\theta)$ rezultă ca o medie a marcajelor (din cadrul unei perioade a funcționării ciclice) ponderată cu duratele de existență ale marcajelor respective.

Anasamblul relațiilor

$$m_i(\theta) \geqslant z_i L_i^{\dagger} F, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{25}$$

poate fi pus sub forma

$$\bar{M}(\theta) \geqslant ZC^{+}F \tag{26}$$

și înmulțind la stînga cu I^T se obține

$$I^T\bar{M}(\theta) = I^T M_0 \geqslant I^T ZC^{+}F \tag{27}$$

conform cu (23).

Pentru o matrice $C^{n\times m}$ de rang ρ dimensiunea v a spațiului soluțiilor ecuației (1) este definită de relația

$$v = n - \rho \tag{28}$$

existînd deci v invarianți liniar independenți. Ca urmare se obțin v relații de tipul (27)

$$I_k^T M_0 \geqslant I_k^T ZC^{+}F, \; k = 1, 2, \ldots, v \tag{29}$$

Pentru frecvențele maxime posibile de executare a tranzițiilor — cazul soluției optime menționate în secțiunea 2 — se obține un vector F ca soluție a relației (22) și a relațiilor

$$I_k^T M_0 = I_k^T ZC^{+}F, \tag{30}$$

vectorul F_{opt} avînd proprietatea

$$F_{\text{opt}} \geqslant F \tag{31}$$

unde F reprezintă orice soluție corespunzătoare unei funcționări periodice a sistemului; soluția optimă — dacă există — se obține deci din (22) și (30).

4. Analiza existenței unei soluții optime pentru sistemul considerat

Prin simpla inspecție a schemei din figura 3 (ca și a schemelor din figurile 1 și 2) se constată că structurile respective nu permit o funcționare periodică optimă și deci nu mai apare indicată folosirea metodei de calcul din secțiunea 3 pentru găsirea soluției optime. Ilustrarea imposibilității funcționării descrise de soluția optimă poate fi făcută pentru orice mod de atașare a temporizărilor la pozițiile schemei.

Astfel, atașînd de exemplu temporizările $z_4 = z_6 = 8$ min (duratele încărcării, prelucrării și descărcării, aferente mașinilor unelte MU_1 și MU_2) și $z_2 = z_7 = 2$ min (duratele apucării piesei neprelucrate și evacuării piesei prelucrate, aferente manipulatorului MN) — celelalte temporizări

fiind neglijabile și deci considerate nule — se constată că după executarea tranziției t_6 mașina unealtă MU_1 nu va putea fi încărcată imediat — deși a apărut punctul de marcaj în p_1 — deoarece manipulatorul MN are nevoie de un timp de 4 minute pentru a evacua piesa prelucrată și a apuca o nouă piesă neprelucrată. O situație similară apare și pentru MU_2, indiferent de valorile temporizărilor alese pentru z_4, z_6, z_2, z_7 (cu condiția să nu fie nule).

Imposibilitatea unei funcționări descrise de soluția optimă derivă deci din faptul că același manipulator execută și încărcarea și descărcarea mașinilor unelte, deci din structura adoptată pentru model. Pentru obținerea unei soluții optime este necesară adoptarea unei noi structuri.

5. Schimbarea structurii modelului

Pentru a înlătura contradicția expusă mai sus este necesară prevederea a două manipulatoare, MN_1 și MN_2, primul pentru încărcare și al doilea pentru descărcare. În modelele anterioare numărul de mașini unelte (două) era egal cu dublul numărului de manipulatoare (unul singur) și pentru a păstra această proporție este indicat un model cu 4 mașini unelte deservite de două manipulatoare, cum este de exemplu modelul din figura 4.

Pozițiile p_1, p_2, p_3, p_4 corespund faptului că mașinile unelte sînt libere, p_7, p_8, p_9, p_{10} — faptului că mașinile unelte sînt ocupate, p_5, p_{11} — faptului că manipulatorul de încărcare are piesa neprelucrată și faptului că

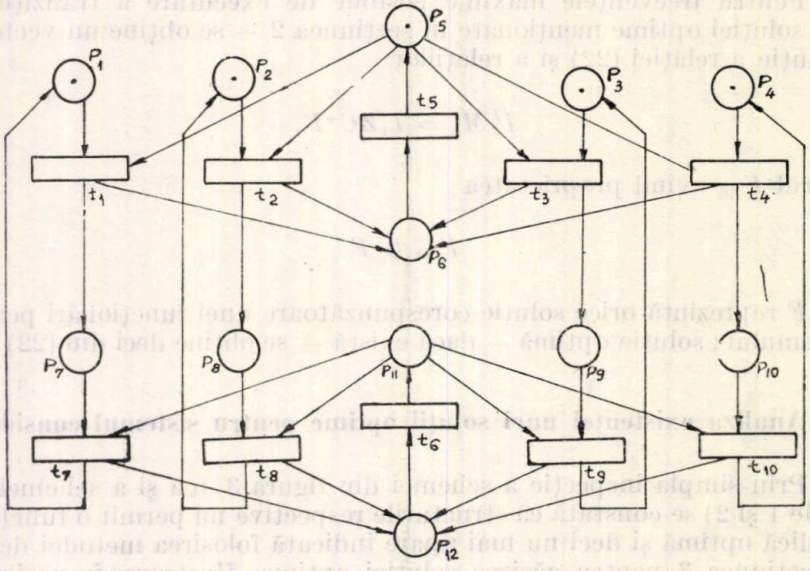


Fig. 4

manipulatorul de descărcare este liber, p_6, p_{12} — faptului că primul manipulator este în situația de a apuca noua piesă neprelucrată și faptului că al doilea manipulator are piesa prelucrată și este în situația de a o evacua; semnificațiile evenimentelor modelate de tranziții sînt evidente.

De altfel, numărul de 4 mașini unelte și 2 manipulatoare corespunde relației dintre temporizările alese în secțiunea anterioară.

6. Calculul soluției optimale

Din figura 4 rezultă matricea C cu expresia :

$$C = \begin{bmatrix} -1 & & & & & & 1 & & & \\ & -1 & & & & & & 1 & & \\ & & -1 & & & & & & 1 & \\ & & & -1 & & & & & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & & & & & \\ 1 & & & & & -1 & & & & \\ & 1 & & & & & -1 & & & \\ & & 1 & & & & & -1 & & \\ & & & 1 & & & & & -1 & \\ & & & & & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{32}$$

matricea C^+ cu expresia

$$C^+ = \begin{bmatrix} & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

şi marcajul iniţial cu expresia

$$M_0^T = [1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0)] \tag{34}$$

Notînd

$$F^T = [f_1 f_2\ f_3\ f_4\ f_5\ f_6\ f_7\ f_8\ f_9\ f_{10}] \tag{35}$$

relaţia (22) conduce la egalităţile

$$\begin{aligned} f_1 &= f_7 \\ f_2 &= f_8 \\ f_3 &= f_9 \\ f_4 &= f_{10} \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} f_5 &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \\ f_6 &= f_7 + f_8 + f_9 + f_{10} \end{aligned} \tag{37}$$

din care derivă egalitatea

$$f_5 = f_6 \tag{38}$$

Au fost obţinute 6 relaţii — în (36) şi (37) — întrucît matricea C are rangul ρ egal cu 6.

Întrucît $n = 12$, relaţia (28) indică faptul că se obţin $v = 6$ invarianţi liniar independenţi.

Folosind relaţia (1) se obţin 6 relaţii între cele 12 elemente — x_1, x_2, ..., x_{12} — ale vectorilor invarianţilor

$$\begin{aligned} x_5 &= x_6 \\ x_{11} &= x_{12} \\ x_1 &= x_7 \\ x_2 &= x_8 \\ x_3 &= x_9 \\ x_4 &= x_{10} \end{aligned} \tag{39}$$

Alegînd valori pentru celelalte elemente ($x_1 = 1$ și $x_5 = x_{11} = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; $x_2 = 1$ și $x_5 = x_{11} = x_1 = x_3 = x_4 = 0$; $x_3 = 1$ și $x_5 = x_{11} = x_1 = x_2 = x_4 = 0$; $x_4 = 1$ și $x_5 = x_{11} = x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $x_5 = 1$ și $x_{11} = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; $x_{11} = 1$ și $x_5 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$) se obțin cei 6 invarianți

$$
\begin{aligned}
I_1^T &= [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \\
I_2^T &= [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0] \\
I_3^T &= [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0] \\
I_4^T &= [0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0] \\
I_5^T &= [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \\
I_6^T &= [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1]
\end{aligned}
\tag{40}
$$

iar relația

$$
I^T M_0 = I^T \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \\ m_7 \\ m_8 \\ m_9 \\ m_{10} \\ m_{11} \\ m_{12} \end{bmatrix} \tag{41}
$$

conduce la proprietățile

$$
\begin{aligned}
m_1 + m_7 &= 1 \\
m_2 + m_8 &= 1 \\
m_3 + m_9 &= 1 \\
m_4 + m_{10} &= 1 \\
m_5 + m_6 &= 1 \\
m_{11} + m_{12} &= 1
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Aceste proprietăți atestă faptul că în permanență se găsește cîte un punct de marcaj pe cele 4 trasee verticale aferente mașinilor unelte și pe cele două trasee verticale aferente manipulatoarelor (fig. 4).

Alegînd temporizările nenule cu valorile

$$z_7 = z_8 = z_9 = z_{10} = 8 \text{ min} \tag{43}$$

$$z_6 = z_{12} = 2 \text{ min} \tag{44}$$

este definită matricea Z din (5), cu expresia

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & & \\ & & & & & 2 & & & & & & \\ & & & & & & 8 & & & & & \\ & & & & & & & 8 & & & & \\ & & & & & & & & 8 & & & \\ & & & & & & & & & 8 & & \\ & & & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & & & 2 \end{bmatrix} \tag{45}$$

Aplicînd (30) pentru cei șase invarianți din (40), cu M_0, Z, C^+ și F din (34), (45), (33) și (35), rezultă relațiile

$$\begin{gathered} 8f_1 = m_{01} + m_{07} = 1 \\ 8f_2 = m_{02} + m_{08} = 1 \\ 8f_3 = m_{03} + m_{09} = 1 \\ 8f_4 = m_{04} + m_{010} = 1 \\ 2(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) = m_{05} + m_{06} = 1 \\ 2(f_7 + f_8 + f_9 + f_{10}) = m_{011} + m_{012} = 1 \end{gathered} \tag{46}$$

care împreună cu (36), (37), (38) determină soluția optimă

$$f_1 = f_7 = \frac{1}{8}$$

$$f_2 = f_8 = \frac{1}{8}$$

$$f_3 = f_9 = \frac{1}{8} \tag{47}$$

$$f_4 = f_{10} = \frac{1}{8}$$

$$f_5 = f_6 = \frac{1}{2}$$

Prin inspecția modelului din figura 4 se verifică faptul că temporizările (43), (44), frecvențele (57) și structura schemei asigură funcționarea cu productivitatea maximă, toate marcajele găsindu-se în diferitele poziții numai pe duratele temporizărilor stabilite, funcționarea periodică avînd loc fără nici o așteptare suplimentară.

7. Concluzii și perspective

a) Metodologia folosită permite proiectarea optimă a conducerii SFF, cu condiția stabilirii unei structuri compatibile cu soluția optimă și cu valorile date ale temporizărilor; schimbarea acestor valori impune schimbarea structurii modelului. Astfel, dacă operațiile de încărcare, prelucrare și descărcare a unei mașini unelte necesită 8 min, dar apucarea unei piese neprelucrate și evacuarea unei piese prelucrate ar necesita numai cîte 1 min (în loc de 2 min cum s-a considerat anterior), atunci pentru obținerea soluției optime devine necesară deservirea unui număr de 8 mașini unelte cu cele două manipulatoare, rezultînd o structură corespunzătoare a modelului.

b) Cînd numărul de mașini unelte crește este indicată o dispunere circulară a lor pentru ca manipulatoarele să le poată deservi succesiv printr-o mișcare de rotație.

c) În ipoteza prelucrării succesive a acelorași semifabricate (prin executarea unei secvențe de operații diferite) ar urma ca semifabricatele respective să fie deplasate simultan de la o mașină unealtă la cea următoare. În acest caz crește numărul manipulatoarelor — care pot forma un ansamblu cu formă de rotor — dar crește sensibil și productivitatea, întrucît nu se mai efectuează o singură operație de prelucrare, ci întreg numărul de operații necesar pentru obținerea produsului.

BIBLIOGRAFIE

1. *S. Călin, V. Cristea*, Folosirea rețelelor Petri pentru modelarea, analiza și simularea sistemelor flexibile de fabricație. „Buletinul Institutului Politehnic București", Seria Automatică—Calculatoare, tomul XLIX, anul 1987.
2. *S. Călin*, On some aspects of Petri nets computing relations. 7th International Conference on Control Systems and Computing Science, Bucharest, 1987.
3. *G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, M. Viot*, A linear-system-theoretic view of discrete-event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. IEEE Trans. on Aut. Control. vol. AC—30, no. 3, 1985.
4. *R. Cuninghame-Green*, Minimax Algebra, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
5. *J. Sifakis*, Performance evaluation of systems using nets. In : Lecture Notes on Computer Science, 84, Springer—Verlag, Berlin, 1980.
6. *G. W. Brams*, Réseaux de Petri : Théorie et pratique. Masson, Paris, 1983.

Flexible Manufacturing Systems Control Optimization

The paper presents a method for flexible manufacturing systems control optimization by use of timed Petri nets. The importance of the net structure for optimal solution determination is emphasized and illustrated by means of examples.

C.Z. 621.391

SIGNAL RESTORATION BY THE USE OF THE SINGULAR VALUE ANALYSIS, Part I

D. STANOMIR, O. MĂNESCU *

In the paper signal restoration by the use of the singular value techniques is investigated. A frequency-domain solution for -the restoration of the signal weighted by a prescribed function is derived. The first part contains the theoretical aspects. In a forthcoming paper numerical results will b. presented.

1. Standard Results from the Theory of Integral Equations [3]

We consider the Fredholm integral equation of the second kind (FIE) in the standard form

$$u(x) - \int_a^b A(x, t)\, u(t)\, \mathrm{d}t = f(x), \tag{1}$$

where : u is the unknown function, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; f is a given L_2 function, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$; $A(x, t)$, $(x, t) \in \Omega$ (a measurable set in $\mathbb{R}^2$), $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, is called the *kernal* of the integral equation ; if A is a $L_2(\Omega)$ function

$$\iint_\Omega |A(x, t)|^2 \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = B_A < \infty\,, \tag{2}$$

then it is called a *Fredholm kernel* (FK). This fact will be assumed in the sequel. The function f is called the *free term* ; if $f = 0$ then (1) is a *homogeneous FIE*.

If A is a FK then the operation

$$v(x) = \int_a^b A(x,\ t)\, u(t)\, \mathrm{d}t \tag{3}$$

defines a bounded linear operator, denoted by $\mathscr{A}$, from L_2 into L_2, or a *Fredholm integral operator* FIO given by

$$\mathscr{A} : L_2 \to L_2\,; \quad u \mapsto v = \mathscr{A}u\,;$$

$$(\mathscr{A}u)(x) = \int_a^b A(x, t)\, u(t)\, \mathrm{d}t\,; \quad \|\mathscr{A}\| \leqslant B_A. \tag{4}$$

* Associate Prof. ; Eng., Chair of Radiocommunications and Data Transmission.

For the theory of FIE is useful to consider the following family of integral equations

$$(\mathscr{I} - \lambda\mathscr{A})\, u = f, \tag{5}$$

where $\mathscr{I}$ is the identity operator and λ is a complex parameter. The homogeneous equation, derived from (5) setting $f = 0$, has always at least the trivial solution, i.e. $u = 0$. A value of λ is called a *regular one* for $\mathscr{A}$ if the homogeneous equation has only the trivial solution. A value λ_k of λ is called a *characteristic one* for $\mathscr{A}$ if the homogeneous equation has solutions other than the trivial one. The corresponding solution is called the *eigenfunction* (associated to λ_k). The inverse of λ_k is called the *eigenvalue* of $\mathscr{A}$ and is denoted by $\alpha_k = \lambda_k^{-1}$.

If A is a given FK then the kernel defined by

$$A^+(x, t) = \overline{A(t, x)} \tag{6}$$

(the upper bar denotes the complex conjugate) is called the *adjoint* of A and acts through the formula

$$(\mathscr{A}^+ u)(x) = \int_a^b \overline{A(t, x)}\, u(t)\, \mathrm{d}t. \tag{7}$$

The adjoint equation of (5) is

$$(\mathscr{I} - \bar{\lambda}\mathscr{A}^+)\, u = f. \tag{8}$$

It is clear that $\mathscr{A}$ and $\mathscr{A}^+$ are linked through

$$(\mathscr{A}u, v) = (u, \mathscr{A}^+ v), \tag{9}$$

where $(\cdot, \cdot)$ denotes the scalar product

$$(u, v) = \int_a^b u(x)\, \overline{v(x)}\, \mathrm{d}x. \tag{10}$$

If $\mathscr{A}$ and $\mathscr{B}$ are FIO so are $\mathscr{A}\mathscr{B}$ and $\mathscr{B}\mathscr{A}$. These operators have the following kernels

$$\begin{aligned} &\int_a^b A(x, s)\, B(s, t)\, \mathrm{d}s \qquad \text{for } \mathscr{A}\mathscr{B} \text{ and} \\ &\int_a^b B(x, s)\, A(s, t)\, \mathrm{d}s \qquad \text{for } \mathscr{B}\mathscr{A}. \end{aligned} \tag{11}$$

If $A = A^+$, $\mathscr{A} = \mathscr{A}^+$, then the FK is called a *symmetric* one and the FIO is done *selfadjoint*. Such operators are called *Hilbert-Schmidt operators* (HSO).

With respect to HSOs the following fact are proved.

a) The direct homogeneous equation $u - \lambda \mathscr{A} u = 0$ and its adjoint $u - \bar{\lambda} \mathscr{A}^+ u = 0$ have the same number of linear independent solutions.

b) If $\{\alpha_k = \lambda_k^{-1}\}$ is the set of the eigenvalues of $\mathscr{A}$ then

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{-1}|^2 \leqslant B_A.$$

c) Any HSO has at least one eigen value.

d) The eigen values are real.

e) The set of eigen functions can be chosen so as to be orthonormal but one eigen value can correspond to several eigenfunctions. The following ordering can be obtained

$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \\ u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots . \end{cases}$$

f) The set of the eigenfunctions is a complete system of functions in the image of L_2 through $\mathscr{A}$.

A HSO is called positive if

$$(\mathscr{A} u, u) \geqslant 0.$$

Let a FIO $\mathscr{A}$ nonnecessary symmetric (self adjoint) be given. Then one can construct two HSO derived from $\mathscr{A}$

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}^+ \mathscr{A} \text{ and } \mathscr{A}_2 = \mathscr{A} \mathscr{A}^+. \tag{12}$$

which are positive operators. It is shown that their characteristic numbers are the same. Denoting them by μ_k^2, we have

$$\begin{cases} \mu_k^2 \mathscr{A}^+ \mathscr{A} v_k = v_k, & k \in \mathbb{N} \\ \mu_k^2 \mathscr{A} \mathscr{A}^+ u_k = u_k \end{cases} \tag{13}$$

where $\{u_k\}$ and $\{v_k\}$ the corresponding eigenfunctions. They are called the *singular functions* of $\mathscr{A}$. The numbers μ_k^2 are called *singular values*.

It is shown that one can choose u_k and v_k so that the following of $\mathscr{A}$ equalities (in the L_2 sense) hold

$$\begin{aligned} A(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} u_k(x) \overline{v_k(t)}, \\ A^+(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} v_k(x) \overline{u_k(t)}. \end{aligned} \tag{14}$$

This is the so-called *UV decomposition of a linear non self adjoint operator.*

From (14) we get two equations by which u_k and v_k are coupled to one another

$$\begin{cases} \mathscr{A} v_k = \mu_k^{-1} \cdot u_k, \\ \mathscr{A}^+ u_k = \mu_k^{-1} \cdot v_k. \end{cases} \tag{15}$$

2. Signal Restoration of the Weighted Inputs

We consider the following practical problem. Let a linear time-invariant system be given through its Green function $h(t)$, so that the output $v(t)$ is given by the *convolution of h and* the input u

$$\begin{cases} v(t) = h * u)\,(t), \\ (h * u)\,(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \end{cases} \tag{16}$$

In some situations we do not receive the exact response to $u(t)$ but the response of the system to $u(t)$ weighted by a specified function, the *windowing function* $p(t)$, i.e., the response to $u(t) \cdot p(t)$.

Now, we ask to restore $u(t)$ by the use of the output $v(t)$ and the weighnting function $p(t)$. It is clear that it is an *inverse problem*.

So, the system under consideration is

$$\begin{cases} v(t) = (\mathscr{A}u)\,(t), \\ (\mathscr{A}u)\,(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t-z)\,p(z)\,u(z)\,\mathrm{d}z, \\ \mathscr{A}u = h * (p \cdot u); \end{cases} \tag{17}$$

with

$$\begin{cases} h \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}),\ u \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}) \\ p \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}),\ |p(t)| \leqslant 1,\ \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{18}$$

It is easy to show that the conditions (18) define a FK. The adjoint $\mathscr{A}^+$ of $\mathscr{A}$ is defined through

$$\mathscr{A}u = \bar{p} \cdot (\breve{h} * u), \tag{19}$$

where the symbol $\cup$ denotes the *reflection*, $\breve{h}(t) \overset{\Delta}{=} h(-t)$.

Now, let a system S be given so that f is the unknown input, p is a known window function and g is the measured output. How can the input be restored by use of f and p?

Suppose the input is expanded in a series with respect to the set of eigenfunctions $\{v_k\}$ (according to (13) and (14))

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k v_k(t) + r(t), \tag{20}$$

where $r(t)$ is the *projection onto the null of* A (r is possible vanishing) and

$$M_k = (f, v_k).$$

If $\mathscr{A}$ is applied to both sides of (20) and (13) is taken into account one obtains

$$g(t) = (\mathscr{A}f)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathscr{A}[M_k v_k(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} M_k u_k(t). \tag{21}$$

But the system $\{u_k\}$ is complete in the range of $\mathscr{A}$ so that $g(t)$ can be expanded in a series with respect to this system of eigenfunction

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k u_k(t), \tag{22}$$

where

$$N_k = (g, u_k).$$

Equating (21) ans (22) gives the unknown coefficient M_k as follows

$$M_k = \mu_k N_k. \tag{23}$$

It is clear that $\mu_k \to \infty$ as $k \to \infty$, so that the equations of (23) must be used up to some $k_{\max}$ depending on the restoration conditions. This difficulty arises from the fact that this is an inverse problem. The approach was given by F. Gori and G. Guattari [1], and was exploited mainly in the time domain.

3. Frequency-Domain Solution of the Inverse Problem

In some situations, such as formant recognition of speakers, one is interested to obtains the spectral structure. To this end we give a frequency-domain formulation of the above problem.

We denote by $\mathscr{F}$ the Fourier operator and by capital letters the Fourier transform of the time function denoted by small letters

$$\mathscr{F}[f](\omega) = F(\omega).$$

It can be proved that

$$\mathrm{F}[\breve{f}] = \breve{F}, \quad \mathrm{F}[\bar{\breve{f}}] = \bar{\breve{F}}.$$

Now we express in a concise form the two operators associated with the operatos A :

$$\begin{cases} \mathscr{A}f = h * (p \cdot f); \quad \mathscr{A}^{+}f = \bar{p} \cdot (\bar{\breve{h}} * f); \\ \mathscr{A}^{+}\mathscr{A}f = \bar{p} \cdot \{\bar{\breve{h}} * [h * (p \cdot f)]\} = \\ \qquad = \bar{p} \cdot [(\bar{\breve{h}} * h) * (p \cdot f)]; \\ \mathscr{A}\mathscr{A}^{+}f = h * [\bar{p} \cdot p \cdot (\bar{\breve{h}} * f)] = \\ \qquad = h * [|p|^2 \cdot (\bar{\breve{h}} * f)]. \end{cases} \tag{24}$$

To obtain the frequency-domain solution we apply the Fourier operator to both (13) and take into account the duality multiplication-con-

volution. First we introduce some notations

$$\begin{cases} \mathcal{F}p = P, \quad \mathcal{F}h = H, \\ q = |p|^2 = \bar{p}\cdot p, \quad \mathcal{F}q = \dfrac{1}{2\pi}\bar{P} * P = Q, \\ k = \breve{h} * h, \quad \mathcal{F}(\breve{h} * h) = \breve{H}\cdot H = K. \end{cases} \tag{25}$$

by use of which we get the final form of the frequency-domain solution

$$\begin{cases} V_k - \mu_k^2 \bar{P} * [K\cdot(P * V_k)] = 0, \\ U_k - \mu_k^2 H\cdot[Q * (\breve{H}\cdot U_k)] = 0. \end{cases} \tag{26}$$

We have thus obtained the integral equations which give the Fourier images of the singular functions of the operator $\mathcal{A}$. It is clear that the equation for U_k is easier for solve than that for V_k because it contains only one convolution. The relation giving f, (20), contains the set $\{V_k\}$ which can be calculated by

$$V_k = \mu_k \mathcal{F}[\mathcal{A}^+ u_k] = \frac{1}{2\pi}\mu_k \bar{P} * [\breve{H}\cdot U_k]. \tag{27}$$

Therefore, the stages for finding $F(\omega)$, or $f(t)$, are the following.

The functions $p(t)$, the windowing function, $h(t)$, the weighting function of the system, and the response $g(t)$ are given time functions.

a) Compute the images P, Q, H and G (exactly or by Fast Fourier Transform algorithm);

b) Compute the set $\{\mu_k^2\}$ by the use the second integral equation of (26), then the set $\{U_k\}$;

c) Compute the set $\{V_k\}$ by use of (27); this step insures the calibration condition (14);

d) Expand the image G of the output g in terms of the system $\{U_k\}$ and get the set $\{N_k\}$;

e) Compute the set $\{M_k\}$ by use of (23); this leads to $F(\omega)$, or by inversion $f(t)$, apart its projection onto the null space of $\mathcal{A}$.

This occurs if the image of L_2 through $\mathcal{A}$ is not the whole L_2.

REFERENCES

1. *F. Gori, G. Guattari*, Signal restoration for linear systems with weighted inputs. Singular values analysis for two cases of low-pass filtering. Inverse Problems 1 (1985) pp. 67–85
2. *D. Stanomir, O. Stănăşilă*, Metode matematice în teoria semnalelor. Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.
3. *P. P. Zabreiko*, ed. al. Integralinie uravnenia, Izd. Nauka, Moskwa 1968.

Recuperarea semnalelor folosind metoda valorilor proprii singulare (partea I)

In lucrare este analizată problema recuperării semnalelor folosind tehnica valorilor proprii singulare. Este prezentată o soluţie în domeniul frecvenţă. Într-o lucrare viitoare vor fi date rezultate numerice.

C.Z. : 621.317.705.621.311.151

THE MEASUREMENT OF THE ACTIVE ENERGY IN DISTORTING REGIME

CARMEN GOLOVANOV *

An analyse of the causes wich alter the accuracy of measurement of active energy in distorting regime using induction watt-hour meters as well an establishment of some relations for the calculation of the error, on the basis of personal experiments and reference material data are presented.

The modern industry introduced, besides the classic distorting receivers (arc equipment, electrolysis, saturated magnetic system control), the controlled rectifiers, which provide the advantages of automatic control systems based on power semiconductors. Consequently, the distortion of the current and, indirectly, the voltage distortion in electrical power systems have become a generalized phenomenon, the effects of which must be analysed especially in those points where an important quantity of energy is conveyed.

The most frequently used apparatus for the measurement of the active electric energy remains the induction watt-hour meter, though the existence of the electronic watt-hour meters based on semiconductor multipliers is worth mentioning.

The hypothesis of the overestimated influence that the presence of the harmonics has upon the indication of classic active energy watt-hour meters is still considered a matter of debate between the suppliers and the consumers of electric energy.

The purpose of this work is to analyse the causes which alter the accuracy of measurement of active energy in distorting regime using induction watt-hour meters, as well as to establish some relations for the calculation of the error, on the basis of personal experiments and reference material data.

---

* Associate Prof., Chair of Electrical Measurements and Apparatus

1. Rogowski Model for the Induction Water-Hour Meter

We assume that the coils of the induction watt-hour meter are connected in a single phase circuit, the current coil in series, (crossed by the current $\underline{I}$), the voltage coil in parallel (crossed by the current $\underline{I}_u$); at the terminals of the voltage coil, the voltage $\underline{U}$ is applied (fig. 1).

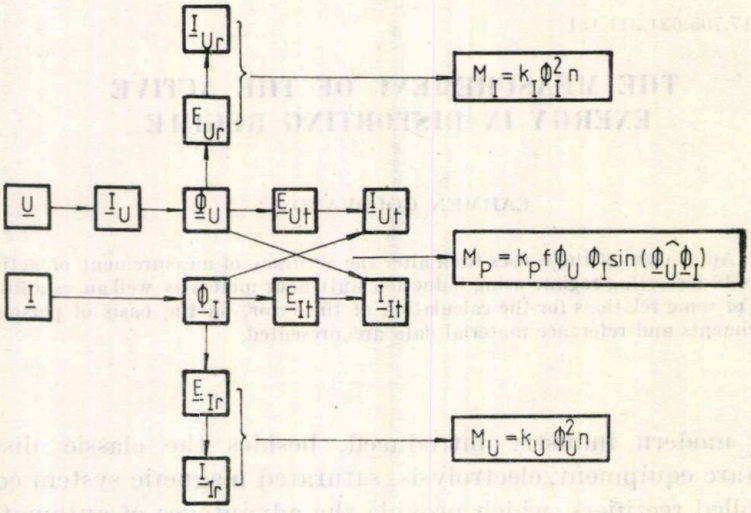


Fig. 1 — Rogowski model for the explanation of the operation of the induction watt-hour meter

U — the voltage applied to the voltage coil
I — the current passing through the current coil
I_U — the current passing through the voltage coil
Φ_U — the utilized flux within the air gap of the voltage electromagnet
Φ_I — the utilized flux within the air gap of the current electromagnet
E_{Ut}, E_{It} — electromotive forces induced by transforming by Φ_U, respectively Φ_I
I_{Ut}, I_{It} — eddy currents induced in the disk by transforming
E_{Ur}, E_{Ir} — voltage induced in the disk by rotation
M_P — the active torque, proportional to the active power P
M_U — the braking torque in the voltage electromagnet field
M_I — the braking torque in the current electromagnet field
f — the frequency
n — the speed of rotation
K_P, K_U, K_I — constants

The alternating currents $\underline{I}$ and $\underline{I}_U$, which pass through the current and voltage coils, produce the magnetic utilized flux $\underline{\Phi}_I$ and $\underline{\Phi}_U$, variable in time. Penetrating the aluminium disk, thema gnetic utilized flux $\underline{\Phi}_I$ and $\underline{\Phi}_U$, induce, by transforming, the electromotive forces $\underline{E}_{It}$ and $\underline{E}_{Ut}$.

These voltage cause the appearance, within the disk, of sheet of induced eddy currents, $\underline{I}_{It}$ and $\underline{I}_{Ut}$.

1.1. *The Active Torque*

a. *Sinusoidal Regime*

The active torque appears as the effect of the interaction between the alternating magnetic fields, dephased in time and space shift, and the disk, crossed by induced eddy currents. The expression of the active torque is :

$$M_P = K_P f \Phi_I \Phi_U \sin \widehat{(\underline{\Phi}_I \underline{\Phi}_U)} \qquad (1)$$

in which : f signifies the frequency and K_P is a constant dependent on the geometrical configuration of the measuring system, of the thickness and the conductivity of the disk.

Figure 2 represents a simplified phase diagram of the watt-hour meter

If we are not taking in consideration the iron losses, the utilized flux Φ_I and Φ_U result in phase with the currents $\underline{I}$, respectively $\underline{I}_A$.

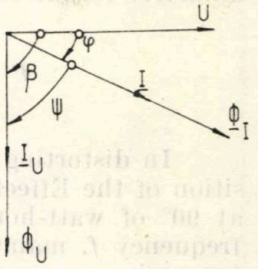


Fig. 2 — The phase diagram of the induction watt-hour-meter

Because of the inductive reactance of the voltage coil, the current $\underline{I}_U$ results dephased of the voltage $\underline{U}$ with an angle β, called „the characteristic angle of the watt-hour meter".

Admitting the operation of the current and voltage electromagnets on the linear part of the magnetization characteristic, we can write the relations : $\Phi_I = K_I I$ and $\Phi_U = K_2 U$, K_1 and K_2 being constants.

If the „adjustment operation at 90°" has been accomplished, having as a result a characteristic angle $\beta = 90°$, the active torque becomes :

$$M_P = K_P f (K_1 I)(K_2 U) \sin(\beta - \varphi) = K'_P f UI \cos\varphi = K'_P f P \qquad (2)$$

in which :

$$\begin{cases} K'_P = K_P K_1 K_2 \\ \text{and} \\ P = UI\cos\varphi \end{cases}$$

As a conclusion, the active torque is proportional to the active power.

b. *Distorting Regime*

Theoretically, an active torque appears only if, in the time variable curve of voltage and current, harmonics of the same order exist.

An active torque does not appear when :

— higher harmonics exist only in the current circuit or only in the voltage circuit,

— the voltage harmonics and the current harmonics are of different orders.

If, in the most general case, the voltage and the current are distorted, having the form :

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} U_k \sqrt{2} \sin (k\omega t + \alpha_k)$$

and

$$i = \sum_{k=1}^{\infty} I_k \sqrt{2} \sin (k\omega t + \alpha_k)$$

an active torque corresponding to the active power appears :

$$P' = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k, \text{ with } \varphi_k = \alpha_k - \beta_k$$

In distorting regime, assuming that the „Principle of the Superposition of the Effects" can be applied and admitting that the adjustment at 90° of watt-hour meter, accomplished in sinusoidal regime of rated frequency f, maintains for each harmonic, the expression of the active torque is :

$$M_P = \sum_k K_{Pk} f_k \Phi_{Ik} \Phi_{Uk} \cos \varphi_k \tag{3}$$

in which :

f_k — represents the frequency k — order harmonic
Φ_{Ik} — the utilized flux corresponding to the harmonic I_k
Φ_{Uk} — the utilized flux corresponding to the harmonic U_k
K_{Pk} — a constant dependent on the order k of the harmonic.

1.2. *The Breaking Torques*

a. *Sinusoidal Regime*

As a result of the action of the active torque, the disk turn round, intersecting thus the lines of the magnetic fields in the air gap of the current and voltage electromagnets.

In the disk will be induced, by rotation, the electromotive forces $\underline{E}_{Ir}$ and $\underline{E}_{Ur}$, which will produce the eddy currents $\underline{I}_{Ir}$ and $\underline{I}_{Ur}$. As a result of the interaction of the magnetic fields and the disk crossed by eddy currents induced by rotation, the braking torques will appear :

— the braking torque in the current electromagnet field, proportional to the square of the current utilized flux :

$$M_I = K_I \Phi_I^2 n \tag{4}$$

— the braking torque in the voltage electromagnet field proportional to the square of the voltage utilized flux :

$$M_U = K_U \Phi_U^2 n \tag{5}$$

in which n is the rotation speed, while K_I and K_U are constants.

Another torque exerting on the disk in the braking torque in the permanent magnet field, whose expression is :

$$M_M = K_M \Phi_M^2 n \tag{6}$$

in which Φ_M is the flux of the permanent magnet and K_M is a constant.

b. *Distorting Regime*

In distorting regime, the expressions of the torques which act on the disk are :

— the braking torque in the current electromagnet field

$$M_I = \sum_k K_{Ik} \Phi_{Ik}^2 n', \tag{7}$$

— the braking torque in the voltage electromagnet field

$$M_U = \sum_k K_{Uk} \Phi_{Uk}^2 n', \tag{8}$$

— the braking torque in the permanent magnet field

$$M_M = K_M \Phi_M^2 n', \tag{9}$$

in which K_{Ik} and K_{Uk} are constants dependent on the order of the harmonic k and n' is the rotation speed of the disk in distorting regime.

2. The Analysis of the Causes of Errors During the Operation of the Induction Watt -Hour Meter in Distorting Regime

During the operation in distorting regime of the induction watt-hour meter, the accuracy of measurement of active energy is affected by errors due to the following causes :

1) the dependence on frequency of the utilized flux in the air gap of the current and voltage electromagnets,

2) the presence of the harmonics in the time variable curves of the utilized flux and of the voltages induced by them at supply in sinusoidal regime of rated frequency (50 Hz),

3) the alteration of the value of the utilized flux fundamental, in the case of a non-sinusoidal current, due to the harmonics,

4) the additional damping of the disk by the harmonics of current and voltage utilized flux.

1) The preponderent cause of errors is the dependence on frequency of the utilized flux within the air gap of the current and voltage electromagnets.

In fig. 3 are represented the utilized flux in the air gap of the voltage and current electromagnets, Φ_{Uk} and Φ_{Ik} measured at the single-phase watt-hour meter CAM having the following technical characteristics : the basic current 10 A, the overcharge 400 %, the reference voltage 220 V and the rated frequency 50 Hz [1].

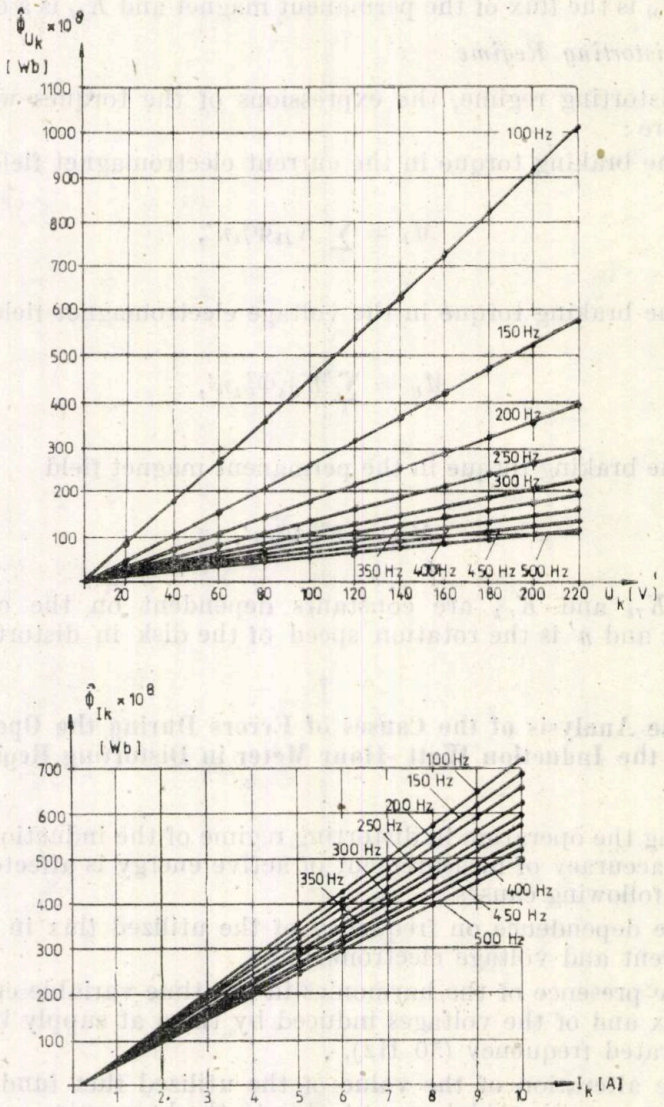


Fig. 3 — The dependence on frequency of the voltage and current utilized flux

At the increasing of the frequency, the utilized flux are decreasing, especialy the utilized flux in the air gap of the voltage electromagnet, as an effect of the increasing of the voltage coil reactance, and, consequen-

tly, the active torque decreases. So, the power corresponding to the k order higher harmonics, P_k, will be measured by the watt-hour meter with a frequency error, ε_k, always negative.

In fig. 4 is represented the frequency error ε_k dependent on the order of the harmonic, experimentally established for the ICE class 2 watt-hour meters, for $\cos \varphi_k = 1$ and $\cos \varphi_k = 0.5$ [6].

Admitting a medium curve of the error, we see that for $k = 3$, the watt-hour meter indicates 30 % less, for $k = 5$, it indicates 50 %, less, etc.

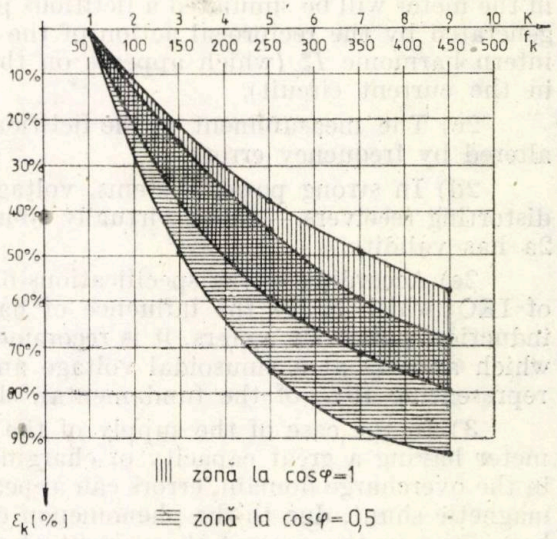


Fig. 4 — The dependence on frequency of the watt-hour meter's error

As a consequence, it results that in distorting regime the induction watt-hour meter could have had important additional errors, if the powers corresponding to the harmonics were significant.

2) The presence of the iron in the magnetic circuits of the watt-hour meter and the operation on the part of the saturation band of the magnetization curve cause a non-linear answer to the magnetizing solenations and, as a consequence, the measuring system itself is considered as a „distorting receiver", which generates intern harmonics U_k^* and I_k^* (ANNEX I).

In reference material [6] is indicated a measuring method for „intern" harmonics U_k^* and I_k^*, as well as their values established for IEC class 0.5 and 2 watt-hour meters.

2a) If harmonics exist only in the network current, the voltage being sinusoidal — i.e. *in the network does not exist* active harmonic power P_k, in the watt-hour meter will be simulated a fictitious power P_{ku}^*, $P_{ku}^* = U_k^* I_k \cos (\widehat{U_k^* I_k})$, generated by the reciprocal action of the current harmonic I_k with the intern harmonic U_k^* (which appears on account of the non-linearity in the voltage circuit).

Table 1

Watt-hour meter	$k = 3$		$k = 5$		$k=7$	
	U_3^*/U_1	I_3^*/I_1	U_5^*/U_1	I_5^*/I_1	U_7^*/U_1	I_7^*/I_1
ICE class 0.5	11.10^{-3}	3.10^{-3}	7.10^{-3}	—	3.10^{-3}	—
ICE class 2	$(7 \div 70)10^{-3}$	$(4 \div 65)10^{-3}$	$(7 \div 18)10^{-3}$	$(1 \div 5)10^{-3}$	$(2 \div 20)10^{-3}$	$(0 \div 5)10^{-3}$

2b) If harmonics exist only in the network voltage, the current being sinusoidal, i.e. *in the network does not exist* the active harmonic power P_k, in the meter will be simulated a fictitious power P^*_{ki}, $P^*_{ki} = U_k I^*_k \cos(\widehat{U_k I^*_k})$ generated by the reciprocal action of the voltage harmonic U_k with the intern harmonic I^*_k (which appears on the account of the non-linearity in the current circuit).

2c) The measurement of the fictitious powers P^*_{ku} and P^*_{ki} will be altered by frequency errors.

2d) In strong power systems, voltages — even at the terminals of distorting receivers — result virtually sinusoidal, so the situation at item 2a has validity.

2e) According to the specifications of the 13A Technical Committee of IEC ,which study the influence of harmonics upon the accuracy of induction watt-hour meters, it is recommended, that the additional error which appears at a sinusoidal voltage and a current of third harmonic representing 10% of the fundamental, should not exceed 1%.

3) In the case of the supply of the current circuit of a watt-hour meter having a great capacity of charging with a nonsinusoidal current in the overcharge domain, errors can appear at the watt-hour meters with magnetic shunt, due to the phenomenon of additional saturation causing harmonics in the core of the current electromagnet. Thus, the value of the fundamental of the utilized flux modifies too respectively, the fundamental harmonic power P_1 itself is erroneously measured. In ANNEX II is presented the analysis of the alteration of the induction fundamental in the presence of a non-sinusoidal solenation.

4) The harmonics of the current and voltage utilized flux produce the aditional damping of the disk; at a given speed of rotation of the disk, the damping is proportional to the square of the utilized flux. The braking of the disk, due to the harmonics, influences the accuracy of the meter.

Works in reference material data certify, however, a reduced influence of causes of errors mentioned at items 2,3 and 4 upon the accuracy of measuring.

In fig. 5 are represented the errors due to the harmonics for a class 0.5 meter (fig. 5.a) and five class 2 meters (fig. 5.b), in both limit cases :

a) harmonics content in the network voltage = 0 ; harmonics content in current (5 ; 10 ; 20)%

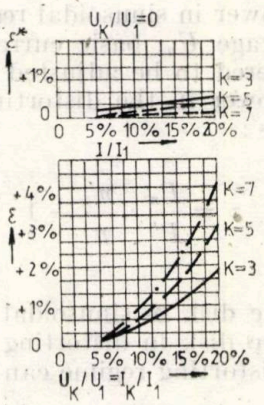
b) harmonics content in the network voltage = harmonics content in current (5 ; 10 ; 20)% for $\cos \varphi_1 = 0.25$; 0.5 ; 1 inductive and capacitive.

In fig. 5 it comes out that :

a) If the network voltage is sinusoidal, the current being distorted, the error of the meter is direct proportional to the harmonics content of the current. As in the network there is no harmonic power P_k, the

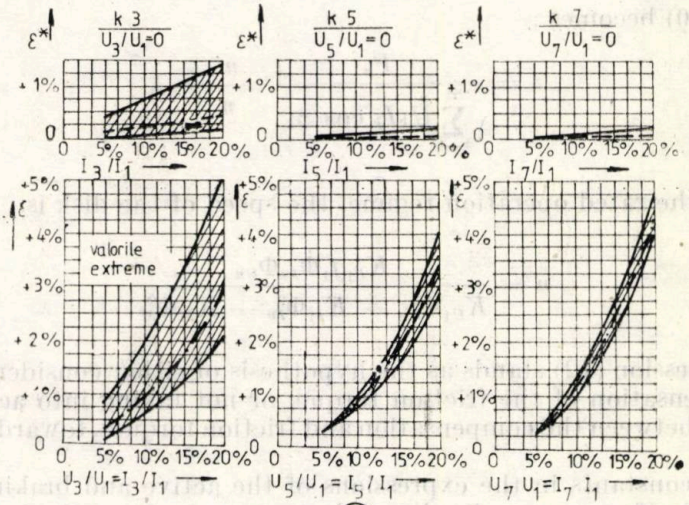
error will be ascertained only by the common effect of the current harmonics I_k with the intern harmonics U_k^*, which appears on the account of the non-linearity in the voltage circuit.

b) If harmonics exist both in the network voltage and in the current, the curve of the dependence of the meter's error on the harmonics content is parabolic; in the network exists a power due to the harmonics P_k, which will be measured by the meter with a frequency error ε_k.



(a)

contor CEI clasa 0,5



(b)

——·——·——·—— $\cos\varphi_1$ 0,8

contoare CEI clasa 2

Fig. 5 — The errors due to harmonics for IEC class 0.5 and 2 meters

3. *The Accuracy of the Induction Watt-Hour Meter in Distorting Regime*

We establish an expression of the meter's error in distorting regime, admitting :

a) the operation of the current and voltage electromagnets on the linear part of the magnetization characteristic,

b) the practicability of the „Principle of the Superposition of the Effects''.

If P_n is the active power in sinusoidal regime, characterized by the parameters : reference voltage U_n, basic current I_n and $\cos \varphi_n = 1$, at which the meter is considered to be adjusted so that the error is zero, while P' represents the power in the distorting regime, the calculation expression of the error is :

$$\varepsilon = \frac{P_n}{P'} \cdot \frac{n'}{n} - 1 \tag{10}$$

in which :

n — the speed of the disk in sinusoidal regime

n' — the speed of the disk in distorting regime

Since the power in distorting regime can be written in the form :

$$P' = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k,$$

relation (10) becomes :

$$\varepsilon = \frac{P_n}{\sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k} \cdot \frac{n'}{n} - 1 \tag{11}$$

For the rated operation regime, the speed of the disk is :

$$n = \frac{K_{P1} f_1 \Phi_{In} \Phi_{Un}}{K_{U1} \Phi_{Un}^2 + K_{I1} \Phi_{In}^2 + K_M \Phi_M^2} \tag{12}$$

Expression (12) stands as the hypothesis of either considering a perfect compensation of the friction torque, or not taking into account the difference between the compensation and friction torques, toward the active torque.

The constants in the expressions of the active and braking torques in the fields of current and voltage electromagnets have the index 1, corresponding to the frequency f_1 of the current and voltage fundamentals The flux Φ_{In} is the utilized flux within the air gap corresponding to the basic (rated) current I_n, while Φ_{Un} is the utilized flux within the air gap of the voltage electromagnet, corresponding to the rated (reference) voltage U_n.

In the operation distorting regime, the speed of the disk is:

$$n' = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} K_{Pk} f_k \Phi_{Ik} \Phi_{Uk} \cos \varphi_k}{\sum_{k=1}^{\infty} K_{Uk} \Phi_{Uk}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} K_{Ik} \Phi_{Ik}^2 + K_M \Phi_M^2} \tag{13}$$

Introducing the relations (12) and (13) in the expression (11), results:

$$\varepsilon[\%] = \left(\frac{P_n}{\sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k} \cdot \frac{\sum_{1=1}^{\infty} K_{Pk} f_k \Phi_{Ik} \Phi_{Uk} \cos \varphi_k}{K_{P1} f_1 \Phi_{Un} \Phi_{In}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{K_{U1} \Phi_{Un}^2 + K_{I1} \Phi_{In}^2 + K_M \Phi_M^2}{\sum_{k=1}^{\infty} K_{Uk} \Phi_{Uk}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} K_{Ik} \Phi_{Ik}^2 + K_M \Phi_M^2} - 1 \right) \cdot 100 \tag{14}$$

With the notations:

$$\begin{cases} K = \dfrac{f_k}{f_1} \; ; \quad a_{Uk} = \dfrac{K_{Uk}}{K_{U1}} \\ a_{Pk} = \dfrac{K_{Pk}}{K_{P1}} ; \quad a_{Ik} = \dfrac{K_{1k}}{K_{I1}} \end{cases} \tag{15}$$

and

$$\begin{cases} \dfrac{K_1 \Phi_{In}^2}{K_{U1} \Phi_{Un}^2 + K_{I1} \Phi_{In}^2 + K_M \Phi_M^2} = \dfrac{M_I}{M_P} = a_I \\ \dfrac{K_{U1} \Phi_{Un}^2}{K_{U1} \Phi_{Un}^2 + K_{I1} \Phi_{In}^2 + K_M \Phi_M^2} = \dfrac{M_U}{M_P} = a_U \end{cases} \tag{16}$$

and after simple changes, the relation (14) becomes:

$$\varepsilon[\%] = \left\{ \frac{P_n}{\sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{\infty} K a_{Pk} \Phi_{Ik} \Phi_{Uk} \cos \varphi_k}{\Phi_{In} \cdot \Phi_{nU}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{a_U \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{Uk} \left(\dfrac{\Phi_{Uk}}{\Phi_{Un}} \right)^2 - 1 \right] + a_I \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{Ik} \left(\dfrac{\Phi_{Ik}}{\Phi_{In}} \right)^2 - 1 \right] + 1} - 1 \right\} \cdot 100 \tag{17}$$

In order to apply the relation (17) of establishing the error in distorting regime, it is necessary to know :

a) the „extern' factors conditioned by the network and the characteristics of the receiver (the complete harmonic spectrum of voltage and current U_k, I_k and cos φ_k) ;

b) the „relation" factors network-measuring apparatus, utilized flux Φ_{Ik} and Φ_{Uk}, for different frequencies cooresponding to the current I_k and to the voltage U_k as well as the utilized flux corresponding to the rated regime, Φ_{In} and Φ_{Un}.

c) the „intern" factors (the constructive and operational parameters of the measuring device) :

— a_I which represents the ratio between the damping torque in the magnetic field of the current electromagnet and the maximum value (that is for $\varphi_n = 0$) of the active torque in the sinusoidal regime corresponding to the reference voltage and to the basic current ;

— a_U which represents the ratio between the damping torque in the magnetic field of the voltage electromagnet and the maximum value of the active torque in the si unsoidal regime corresponding to the reference voltage and to the basic current ;

— a_{Pk} which represents the ratio between the constants in the expressions of the active torque corresponding to the k harmonic and to the fundamental ;

— a_{Uk} which represents the ratio between the constants in the expressions of the damping torques in the field of the voltage electromagnet corresponding to the k harmonic and to the fundamental :

— a_{Ik} which represents the ratio between the constants in the expression of the damping torques in the field of the current electromagnet corresponding to the k harmonic and to the fundamental.

In [1] is presented an original method for the determination of the „intern" factors of the watt-hour meter. On the basis of personal experiments, as well as of reference material data, results that the additional errors, due to the damping of the disk because of the harmonics, are small and be not taking into consideration toward the errors caused by the dependence on frequency of the utilized flux.

In relation (17)

$$a_U\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{Uk}\left(\frac{\Phi_{Uk}}{\Phi_{Un}}\right)^2 - 1\right] + a_I\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{Ik}\left(\frac{\Phi_{Ik}}{\Phi_{In}}\right)^2 - 1\right] \ll 1$$

and, consequently, results a simplified expression for the calculation of the error in distorting regime :

$$\varepsilon[\%] = \left(\frac{P_n}{\sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{\infty} K a_{Pk} \Phi_{Ik} \Phi_{Uk} \cos \varphi_k}{\Phi_{In}\Phi_{Un}} - 1\right) \cdot 100$$

The relation is, however, inconvenient to be practically used in the form (18 being necessary to know the utilized flux within the air gap of the current and voltage electromagnets Φ_{Ik}, Φ_{Uk}, Φ_{In} and Φ_{Un}, as well as the constant a_{Pk}.

If we consider the supply in the sinusoidal regime of harmonic frequency f_k, the frequency error, ε_k, results as :

$$\varepsilon_k = \frac{P_n}{P_k} \cdot \frac{K a_{Pk} \Phi_{Ik} \Phi_{Uk} \cos \varphi_k}{\Phi_{In} \Phi_{Un}} - 1 \tag{19}$$

From relation (19) results :

$$\frac{K a_{Pk} \Phi_{Ik} \Phi_{Uk} \cos \varphi_k}{I_n U_n} = \frac{P_k}{P_n} (\varepsilon_k + 1) \tag{20}$$

and, replacing in (18), we obtain :

$$\varepsilon[\%] = \left(\frac{P_n}{\sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P_k \varepsilon_k + \sum_{k=1}^{\infty} P_k}{P_n} - 1 \right) \cdot 100 \tag{21}$$

For the fundamental, $k = 1$, the frequency error is $\varepsilon_1 = 0$, so the expression of the error in the distorting regime becomes :

$$\varepsilon[\%] = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P_k \varepsilon_k}{\sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k} \cdot 100 \tag{22}$$

4. Conclusions

1) In distorting regime, especially an account of the dependence on frequency of the utilized flux with in the air gap of the current and voltage electromagnets, the induction watt-hour meters *does not measure accurately* the active energy.

2) Consequently, results a simple method of determination of error in distorting regime, assuming a known :

a) the ,,extern'' factors conditioned by the network and the characteristics of the receiver(the complete harmonic spectrum of voltage and current U_k, $I_k \cos \varphi_k$).

b) the frequency characteristic of the watt-hour meter $\varepsilon_k = f(P_k)$.

The frequency characteristic of the watt-hour meter is established experimentally.

3) In the distorting regime met in practice in the case of correct dimensioned and regular operating networks the additional error of active energy induction meters does not exceed, usually, (1—2)%.

ANNEX 1

The magnetization c haracteristic $B = f(\theta)$ can be represented as a series :

$$B = c_1\theta + c_3\theta^3 + c_4\theta^5 \qquad \text{(AI—1)}$$

but, within the domain between 0 and 0.2 T, the following relation stands with enough accuracy :

$$B = c_1\theta + c_3\theta^3 \qquad \text{(AI—2)}$$

If the solenation has a sinusoidal time dependence on the frequency of the fundamental wave, we obtain :

$$\theta_1(t) = \hat{\theta}_1 \sin\omega t \qquad \text{(AI—3)}$$

the relation (AI—2) becomes :

$$B(t) = c_1\hat{\theta}_1 \sin\omega t + c_3\hat{\theta}_1^3 \sin^3\omega t \qquad \text{(AI—4)}$$

After simple transformations, taking into account that :

$$\sin^3\omega t = \frac{3}{4}\sin\omega t - \frac{1}{4}\sin 3\omega t$$

results :

$$B(t) = \hat{\theta}_1\left(c_1 + \frac{3}{4}c_3\hat{\theta}_1^2\right)\sin\omega t + \frac{1}{4}c_3\hat{\theta}_1^3\sin(3\omega t - \pi) =$$

$$= \hat{B}_1 \sin\omega t + \hat{B}_3 \sin(3\omega t - \pi) = B_1(t) + B_3^*(t) \qquad \text{(AI—5)}$$

so, in the time variable curve of the induction (respectively, of the utilized flux) a third harmonic appears, besides the fundamental.

The fundamental of the magnetic induction, at sinusoidal solenation, has the expression :

$$B_1(t) = \hat{\theta}_1\left(c_1 + \frac{3}{4}c_3\hat{\theta}_1^2\right)\sin\omega t \qquad \text{(AI—6)}$$

while the third harmonic of the magnetic induction is :

$$\hat{B}_3^*(t) = \frac{1}{4}c_3\hat{\theta}_1^3\sin(3\omega t - \pi) \qquad \text{(AI—7)}$$

The ratio of the maximum values of the third-harmonic and of the fundamental is :

$$\frac{\hat{B}_3^*}{\hat{B}_1} = \frac{\frac{1}{4}c_3\hat{\theta}_1^3}{\hat{\theta}_1\left(c_1 + \frac{3}{4}c_3\right)\hat{\theta}_1^2} = \frac{\frac{1}{4}c_3\hat{\theta}_1^2}{c_1 + \frac{3}{4}c_3\hat{\theta}_1^2} \qquad \text{(AI—8)}$$

ANNEX II

We assume that the cu rrent coil is crossed by a current formed of the fundamental i°_1, upon which a harmonic i_3 is superposed ; on account of the non-linear behaviour of the magnetic circuit, the current harmonic i_3 will influence not only the harmonic $B_3(t)$ of the magnetic induction, but also the fundamental $B_1(t)$.

Having $\theta(t) = \theta(t) + \theta_3(t) = \theta_1 \sin \omega t + \hat{\theta}_3 \sin (3\omega t - 180°) = \hat{\theta}_1 \sin \omega t - \hat{\theta}_3 \sin 3\omega t$ and introducing the relation (AII—1) in the expression of the magnetization characteristic

$$B = c_1 \theta + c_3 \theta^3,$$

we obtain :

$$B(t) = c_1(\hat{\theta}_1 \sin \omega t - \hat{\theta}_3 \sin 3\omega t) + c_3 (\hat{\theta}_1 \sin \omega t - \theta_3 \sin 3\omega t)^3 \qquad \text{(AII—2)}$$

After simple transformations, taking into account that :

$$\begin{cases} \sin^3 \omega t = \dfrac{3}{4} \sin \omega t - \dfrac{1}{4} \sin 3\omega t \\ \sin^3 3\omega t = \dfrac{1}{4} \sin 3\omega t - \dfrac{1}{4} \sin 9\omega t \\ \sin^2 \omega t \cdot \sin 3\omega t = \dfrac{1}{4} \sin \omega t + \dfrac{1}{2} \sin \omega t - \dfrac{1}{4} \sin 5\omega t \\ \sin \omega t \cdot \sin^2 3\omega t = \dfrac{1}{2} \sin \omega t + \dfrac{1}{4} \sin 5\omega t - \dfrac{1}{4} \sin 7\omega t \end{cases} \qquad \text{(AII—3)}$$

the fundamental of the induction will be :

$$B_1'(t) = c_1 \hat{\theta}_1 \sin \omega t \left[1 + \frac{3}{4} \frac{c_3}{c_1} \hat{\theta}_1 + \frac{3}{4} \frac{c_3}{c_1} \hat{\theta}_3 (\hat{\theta}_1 + 2\hat{\theta}_3) \right] \qquad \text{(AII—4)}$$

The influence of the third harmonic of the solenation upon the fundamental of the induction will make evident introducing a reaction coefficient :

$$K_r = \frac{\hat{B}_1' - \hat{B}_1}{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1'}{\hat{B}_1} - 1 \qquad \text{(AII—5)}$$

Introducing the relations (AI—6) and (AII—4) in (AII—5), we have :

$$K_r = \frac{\hat{\theta}_3 (\hat{\theta}_1 + 2\hat{\theta}_3)}{\frac{4}{3} \frac{c_1}{c_3} + \hat{\theta}_1^2} \qquad \text{(AII—6)}$$

Since $\dfrac{I_3^*}{I_1} = \dfrac{B_3^*}{B_1}$, form equation (AI—8) results :

$$\frac{c_1}{c_3} = \frac{\hat{\theta}_1^2}{4} \left(\frac{I_1}{I_3^*} - 3 \right) \qquad \text{(AII—7)}$$

and, introducing the ratio $\dfrac{c_1}{c_3}$ in the relation (AII—6), we obtain :

$$K_r = \frac{I_3^*}{I_1} \left[\frac{-\hat{\theta}_3}{\hat{\theta}_1} - 2 \left(\frac{\hat{\theta}_3}{\hat{\theta}_1} \right)^2 \right] \qquad \text{(AII—8)}$$

If we do the same calculation for the determination of the reaction K_r, considering the third harmonic of the solenation in phase with the fundamental, the sign „+" in the bracket of the relation (AII—8) must be replaced by the sign „—".

The relation (AII—8) represents therefore the greatest possible reaction K_r at a given ratio $\frac{\hat{\theta}_3}{\hat{\theta}_1}$.

In table A—1 are shown the greatest possible reactions K_r, for the ratios $\frac{\hat{\theta}_3}{\hat{\theta}_1} = (5; 10; 20)\%$, determined at IEC class 0,5 and 2 watt-hour meters.

Table A—1

Type of watt-hour meter	I_3^*/I_1		Reaction K_r	
	from	$\hat{\theta}_3/\hat{\theta}_1 = 5\%$	01%	20%
class 0.5	$3 \cdot 10^{-3}$	0.5%	1.1%	2.5%
class 2 (meters for *a* to *d*)	$(3.7 \div 7.9)10^{-3}$	$(0.6 \div 1.3)\%$	$(1.3 \div 2.8)\%$	$(3.1 \div 6.6)\%$
class 2 (meter *e*)	$65 \cdot 10^{-3}$	11%	23%	54%

As we can notice in table A—1, at the *a* type watt- hour meter, the ratio I_3^*/I_1 is much greater than at the other constructive types from *a* to *d* and that was the reason why the reaction K was calculated apart. At the type *e* class 2 watt-hour meter, the reaction has the same order of magnitude as the error of the watt-hour meter.

REFERENCES

1. *I. S. Antoniu*, Influence du régime déformant sur les conditions de mesure de la puissance et de l''énergie active, Rapp. nr. 301, CIGRE, 4—14 iunie 1968.
2. *C. Golovanov*, Contribuţii la studiul influenţei armonicilor de tensiune şi de curent asupra funcţionării aparatelor electrice de măsurat, Teză de doctorat, Bucureşti 1974.
3. *C. Golovanov*, On the Expressions of the Motor and Braking Torques of the Single Phase Introduction Watt--hour Meter in Sinusoidal Regime of Frequency f = 50 Hz, Rev. Roum. Sci. Techn. Electrotechn., et Energ,. vol. 22, nr. 1, pag. 75—88, 1977.
4. *C. Golovanov* ,Single Phase Induction Watt-hour Meter in Distorting Regime, Rev. Roum. Techn. Electrotechn,. et Energ, vol. 22, nr. 2, pag. 233—248, 1977
5. *A. Ţugulea, C. Golovanov*, Efectele energetice ale regimurilor nesimetrice şi deformante ale sistemelor energetice. Posibilităţi de măsurare. Conferinţa naţională de energetică, Bucureşti, 1968.
6. *F. Tschappu*, Messmethoden zur Bestimmung des Einflusses von Netzobarwellen auf die Messgenauigkeit der Elektrizitätszähler, Teil I. Archiv für technische Messen, Hoft 2, S. 33—36, 1968, Teil II. Archiv für technische Messen, Heft 3, S. 53—58, 1968.
7. *A. Millea*, Asupra măsurării energiei în regim deformant. Metrologia aplicată, 30 (serie nouă—9)/1983, nr. 3. pag. 102—107.
8. *M. Popescu*, Semnul erorii de măsurare a energiei active la consumatorii deformanţi, Energetica XXXIII (1984), nr. 3, pag. 132—133.

Măsurarea energiei active în regim deformant

În lucrare se analizează factorii care afectează precizia de măsurare a energiei active cu ajutorul contoarelor de inducţie şi se stabilesc relaţii de calcul al erorii, folosind experienţa personală şi datele prezentate în literatura de specialitate.

CZ: 621.396

ANALIZA TOPOLOGICĂ: CHEIA FORMULĂRII PE CALCULATOR A ECUAȚIILOR CIRCUITULUI

M. IORDACHE, LUCIA DUMITRIU, M. PERPELEA *

Lucrarea prezintă cîteva aspecte de topologie a circuitelor electrice care au o importanță esențială în simularea, analiza în proiectarea pe calculator a circuitelor.

Sînt expuse aspecte legate de: formarea pe calculator a matricelor de incidență, generarea fără repetiții a arborilor sau coarborilor, determinarea unui arbore normal și a matricelor incidențelor esențiale și calculul simbolic al funcțiilor de rețea.

De asemenea este reliefată importanța deosebită pe care o are cunoașterea ca tip și număr a elementelor în exces în analiza circuitelor electrice de mare complexitate.

1. Introducere

Orice circuit electric cu parametri concentrați satisface, în principal, trei relații de bază: prima și a doua teoremă ale lui Kirchhoff și ecuația caracteristică a fiecărui element de circuit.

Teoremele lui Kirchhoff sînt relații algebrice liniare între tensiunile sau curenții laturilor, relații independente de caracteristicile elementelor de circuit, ele depinzînd în exclusivitate de modul de interconectare a laturilor.

Analiza topologică a circuitelor electrice (sau pe scurt topologia circuitelor) se ocupă cu acele proprietăți ale circuitelor electrice liniare sau neliniare cu parametri concentrați care depind numai de interconexiunea laturilor.

Așa cum se arată în [1], [2], [3], [4] o largă clasă de circuite cu parametri concentrați, atît liniare cît și neliniare, pot fi modelate printr-o interconectare de elemente dipolare cu caracteristici specificate. O descriere completă a unui model de circuit trebuie să conțină următoarele informații:

1) modul cum sînt conectate laturile;

2) sensurile de referință ale curenților și tensiunilor laturilor;

3) caracteristicile laturilor.

---

* Șef lucrări dr. ing.; Asist. dr ing., catedra Electrotehnică, Activist, Comitetul Municipal UTC, Rîmnicu Vîlcea

Un mod simplu și natural de a obține primele două informații, menționate mai sus, este acela prin care circuitului studiat $\mathscr{C}$, i se asociază un graf orientat G_0 după următoarea regulă : fiecare element bipolar se înlocuiește printr-un arc de curbă orientat în același sens cu sensul curentului prin latură. În cele ce urmează vom presupune că sensurile de referință ale tensiunilor laturilor coincid cu cele ale curenților (regula de asociere a sensurilor de referință de la receptoare). De exemplu, în figura 1, b se prezintă graful orientat G_0 asociat circuitului din figura 1, a.

Cînd nu interesează sensurile curenților și tensiunilor laturilor se poate asocia circuitului $\mathscr{C}$ un graf neorientat G_n (fig. 1, c) care se obține simplu din G_0 prin îndepărtarea săgeților.

Definiția 1. Se numește graf orientat G_0 tripletul (L, NXN, f) în care funcția $f : L \to NXN$ face ca fiecărui element din mulțimea $L (L \subset \mathbb{N})$ să-i corespundă o pereche și numai una din mulțimea perechilor ordonate NXN de elemente ale unei mulțimi $N (N \subset \mathbb{N})$.

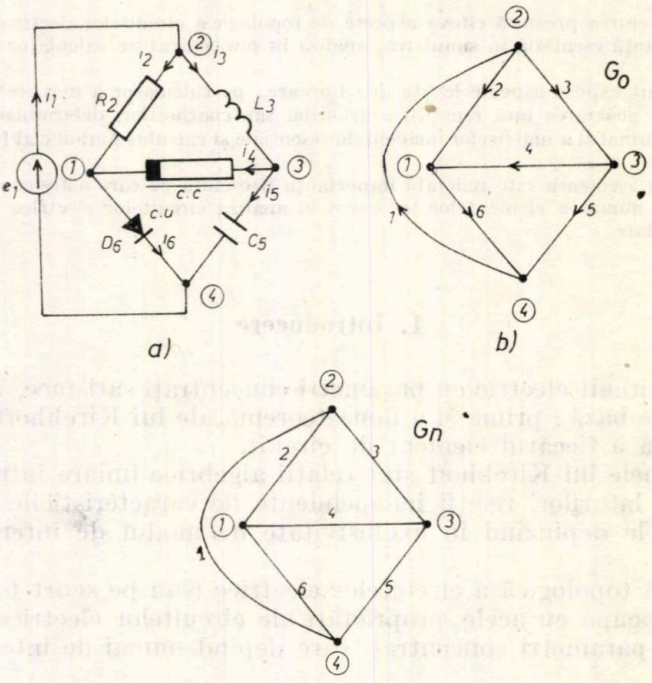


Fig. 1 — Circuitul și grafurile asociate.

În cele ce urmează se fac următoarele notații :
$\mathscr{P}(X)$ — clasa submulțimilor (părților) mulțimii X;
$|X|$ — cardinalul (numărul elementelor) mulțimii X;
$f|_B$ — restricția funcției f la mulțimea B.
Fie N și L două mulțimi finite cu $|N| \geqslant 2 (N \subset \mathbb{N}, L \subset \mathbb{N})$ și

$$\mathscr{D} = \{X \mid X \in \mathscr{P}(N), |X| = 2\} \tag{1}$$

Definiția 2. Tripletul $G_n = (L, N, f)$ cu $f : L \to \mathcal{D}$, [8], se numește graf neorientat.

Nu intenționăm să prezentăm în această lucrare toate conceptele de bază din topologia circuitelor, ele sînt fundamentate într-o serie de lucrări [1], [3], [5], [6], [7], [8], ne vom limita la prezentarea acelor aspecte din topologia circuitelor care au o importanță esențială în simularea și analiza pe calculator a circuitelor electrice.

În formularea pe calculator a ecuațiilor corespunzătoare anumitor regimuri de funcționare a circuitelor, un rol esențial îl are selectarea unui arbore în G_0 care să conțină anumite tipuri de elemente de circuit, numit *arbore normal* sau de *referință* (*AN* sau *AR*) (*pădure normală* sau de *referință* (*PN* sau *PR*), pentru circuitele neconexe), [1], [4], [9], [10], [11].

În cazul analizei circuitelor electrice nereciproce (active), cînd pentru formularea sistematică a teoremelor lui Kirchhoff se asociază circuitului studiat $\mathcal{C}$ două grafuri orientate, unul de curent G_0^I și altul de tensiune G_0^U [3], [4], [6], [9], este necesară alegerea aceluiași arbore normal numit— *arbore normal* (*de referință*) comun (*ANC* sau *ARC*) (*Pădure normală* (*de referință*) *comună* (*PMC* sau *PRC*), pentru circuitele neconexe).

De asemenea, în determinarea în formă simbolică a funcțiilor de rețea ale unui circuit electric dat $\mathcal{C}$, cea mai laborioasă parte o constituie găsirea tuturor arborilor sau coarborilor din grafurile asociate circuitului $\mathcal{C}$.

Analiza topologică a circuitelor are o importanță deosebită nu numai în formularea propriu-zisă a ecuațiilor circuitului, ci și în studiul calitativ al circuitelor [1], [12]. Numeroase teoreme referitoare la existența soluțiilor și la convergența și stabilitatea anumitor algoritmi de calcul se pot demonstra simplu folosind proprietățile topologice ale circuitului [1], [10], [11].

2. Determinarea ANC (ARNC) corespunzător grafurilor G_0^I și G_0^U

Deși un graf orientat G_0, definit în paragraful 1, descrie complet interconexiunea și sensurile de referință ale laturilor unui circuit cu parametri concentrați, el nu este adecvat pentru stocare într-un calculator numeric. Informațiile conținute într-un graf orientat G_0 pot fi complet stocate într-o matrice numită *matrice de incidență*. Există numeroase matrice de incidență (laturi-noduri, laturi-bucle, laturi-secțiuni etc.) [1], [3], [6], însă dacă se selectează în G_0(G_0^I și G_0^U, pentru circuitele nereciproce un AN(ARN)(ANC(ARNC)) și se determină matricea incidențelor esențiale (MIE) după ce în prealabil s-au reordonat indicii laturilor în ordinea ramuri (laturile arborelui), coarde (laturile coraborelui), toate celelalte tipuri de matrice de incidență cunoscute în literatură se pot calcula imediat [1], [3], [14].

MIE corespunzătoare unui AN(ARN) dintr-un graf orientat dat G_0, reprezintă matricea de incidență a laturilor coarde la suprafețele de secțiune atașate laturilor ramuri. Suprafața de secțiune Σ_k atașată laturii ramură l_k are sensul pozitiv al versorului normale în același sens cu sensul laturii l_k și intersectează, în afara laturii ramură l_k, numai laturi coarde. De exemplu, dacă pentru graful orientat din figura 1, b, se alege ca AN

arborele format din laturile {1, 2, 3}, matricea incidențelor esențiale Λ are, ținînd seama de modul de atașare a suprafețelor de secțiune celor trei ramuri din figura 2, forma

$$\Lambda = \begin{array}{c} a/c \\ \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_4 & c_5 & c_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2}$$

În figura 2 laturile arborelui (ramurile) s-au desenat cu linie continuă laturile coarborelui (coardele) asociat AN s-au desenat cu linie întreruptă și $\bar{n}_+$ reprezintă versorul normalei pozitive la suprafața de secțiune respectivă.

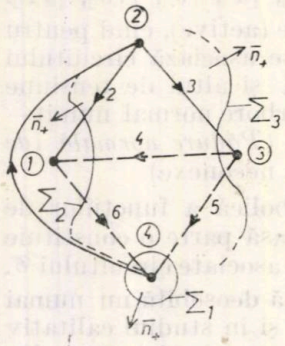


Fig. 2 — Asocierea suprafețelor de secțiune a laturilor ramuri într-un graf orientat

În [11] se prezintă o metodă ingenioasă de determinare a ANC(ARNC), metodă ce utilizează o tehnică de calcul cu matrice rare, în sensul că pentru descrierea celor două grafuri orientate G_0^I și G_0^U se folosește cîte o matrice formată din patru linii și l coloane (l fiind numărul laturilor grafului G_0^I identic cu cel al grafului G_0^U), numite — *matrice de descriere* (*MD*). Fiecare coloană a *MD* este formată din : indicele laturii, nodul inițial, nodul final și tipul elementului de circuit care formează latura respectivă. De fapt, liniile 2 și 3 ale MD a unui graf reprezintă, ca număr, elementele nenule ale matricei de incidență laturi-noduri.

MD a grafului orientat G_0 reprezentat în figura 2 are forma

$$MD = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

ANC (ARNC) trebuie să conțină, conform definiției, [1], [9], [10], [11] anumite tipuri de elemente de circuit din structura circuitului analizat (de exemplu, toate sursele ideale independente de tensiune (SIIT), toate laturile (porțile) comandate ale surselor de tensiune comandate în curent sau în tensiune, toate laturile (porțile) de comandă ale surselor de curent comandate în curent etc.). Pentru aceasta, elementele circuitului se împart, în funcție de restricțiile impuse ANC (ARNC), în nouă tipuri numerotate de la 1 la 9.

Tipul 1 de elemente de circuit conține sursele ideale independente de tensiune (SIIT, laturi de tipul E). În structura elementelor de tipul 2 intră condensatoarele liniare sau neliniare controlate în tensiune (c.u.) și rezistoarele neliniare c.u. (laturi de tip C și respectiv R_u). Tipul 3 cuprinde rezistoarele liniare (laturi de tip R). Din categoria elementelor de

tipul 4 fac parte bobinele liniare sau neliniare controlate în curent (c.i.) și rezistoarele neliniare c.i. (laturi de tip L și respectiv R_t). Mulțimea elementelor de tipul 5 conține sursele ideale independente de curent (SIIC, laturi de tip J). În categoria elementelor de tipul 6 intră toate laturile (porțile) comandate ale surselor de tensiune comandate în curent $\hat{e}(i)$ (laturi de tip E_{ci}). Tipul 7 conține toate laturile (porțile) comandate ale surselor de tensiune comandate în tensiune $\hat{e}(u)$ (laturile de tip E_{cu}). Tipul 8 cuprinde laturile (porțile) comandate ale surselor de curent comandate în tensiune $\hat{j}(u)$ (laturi de tipul J_{cu}), iar tipul 9 conține laturile (porțile) de comandă ale surselor de curent comandate în curent $\hat{j}(i)$ (laturi de tipul J_{ci}).

Laturile (porțile) de comandă ale surselor comandate : $\hat{e}(i)$, $\hat{e}(u)$ și $\hat{j}(u)$ (laturi de tipul : E_{Ci}, E_{Cu} și respectiv J_{Cu}) primesc ca tip, pe calculator, indicii cu semn schimbat ai laturilor (porților) comandate respective, iar laturile comandate, ale surselor comandate $\hat{j}(i)$ (laturi de tipul J_{ci}), primesc ca tip, pe calculator indicii cu semn schimbat ai laturilor (porților) de comandă respective.

Împărțirea elementelor de circuit în cele 9 tipuri este necesară pentru formarea automată pe calculator a celor două grafuri orientate G_0^I și G_0^U, [13], și pentru a putea determina ca tip și număr elementele în exces [4], [11].

Deoarece sursele comandate sînt echivalente cu rezistoare liniare sau neliniare, ce ocupă poziții diferite în grafurile G_0^I și G_0^U, [3], [4], după determinarea ANC (ARNC), aceste rezistoare se includ în mulțimea elementelor de tipul 3, dacă sînt liniare, în mulțimea elementelor de tipul 2, dacă sînt neliniare c.u. sau în cea a elementelor de tipul 4 dacă sînt neliniare c.i.

Pentru fiecare latură scurtcircuitată în graful G_0^U sau în graful G_0^I se păstrează nodul în care intră sensul de referință al tensiunii, respectiv al curentului.

În calculul simbolic, al funcțiilor de rețea cu metoda arborilor neorientați, [3], [14], numerotarea nodurilor în grafurile G_0^I și G_0^U are o deosebită importanță mai ales în determinarea factorilor de semn.

ANC (ARNC) trebuie să conțină : toate laturile de tipul E, E_{ci}, E_{cu} și J_{ci}, un număr maxim posibil de condensatoare, un număr maxim posibil de rezistoare neliniare c.u. și nici o latură de tipul E_{Cu}, J_{ci}, J_{cu} sau J.

Algoritmul de determinare a unui ANC (ARNC) cu restricțiile menționate mai sus este descris detaliat în [11].

Pentru circuitul nereciproc din figura 3, a, grafurile G_0 și G_0 au forma prezentată în figura 3, b, respectiv, 3, c ,iar ANC este alcătuit din laturile : {2, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17}, laturi desenate cu linii continue în figurile 3, b și c.

Sursele comandate neomogene $\hat{e}(i)$ și $\hat{j}(u)$ se simulează în grafurile G_0^I și G_0^U printr-o singură latură căreia i se atribuie indicele laturii comandate și ocupă în graful G_0^I locul porții de comandă și respectiv comandate,

avînd sensul curentului de comandă, respectiv comandat, iar în graful G_0^U ocupă locul porții comandate și respectiv de comandă, avînd sensul tensiunii comandate, respectiv de comandă.

Sursele comandate omogene $\hat{e}(u)$ și $\hat{j}(i)$ se simulează în grafurile G_0^I și G_0^U prin cîte două laturi conform regulilor prezentate în [4], [14], [15].

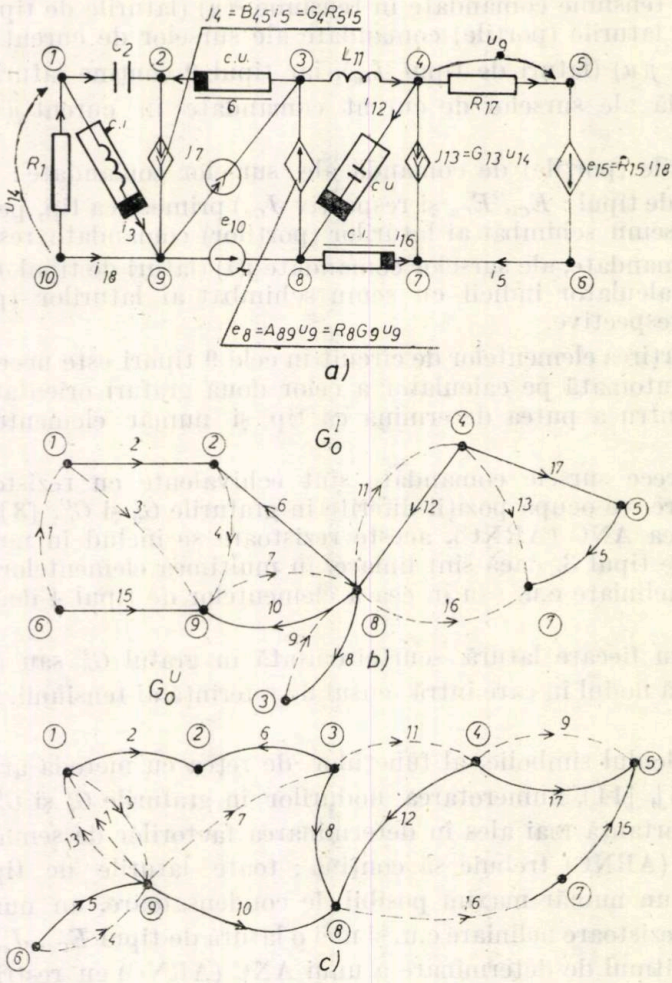


Fig. 3 — Circuitul nereciproc și grafurile G_0^I și G_0^U asociate

3. Determinarea matricei incidențelor esențiale (MIE) într-un graf orientat

Pentru determinarea MIE Λ corespunzătoare unui arbore dintr-un graf orientat G_0 conex sau nu, matrice de incidență cu ajutorul căreia se pot forma toate celelalte tipuri de martrice de incidență, se procedează astfel :

— se determină un AN(ARN) în graful G_0 (un ANC (ARNC) în grafurile G_0^I și G_0^U, dacă circuitul studiat este nereciproc (activ);

— se introduce cîte o latură coardă din G_0 în AN (ARN) și se identifică laturile din care este formată bucla obținută prin introducerea laturii coardă;

— se compară sensul de referință al laturilor ramuri, din bucla astfel formată, cu sensul de referință al laturii coardă, căreia i s-a atașat bucla respectivă, și se completează pe coloana corespunzătoare acestei coarde cu -1 cînd sensurile de referință coincid, cu $+1$ cînd sensurile de referință sînt contrare și cu zero cînd latura ramură din AN(ARN) nu aparține buclei respective.

MIE se notează, uzual cu literele: Λ, β sau D.

4. Generarea arborilor și coarborilor

În determinarea funcțiilor de rețea în formă simbolică cea mai laborioasă parte o constituie găsirea arborilor și coarborilor din grafurile asociate circuitelor electrice analizate.

Eficiența analizei circuitelor complexe printr-o metodă topologică utilizînd calculatoarele electronice depinde în mare măsură de eficiența procesului de generare a arborilor sau coarborilor grafului asociat sistemului respectiv.

Cel mai simplu mod de generare a arborilor unui graf conex cu n noduri este de a examina toate combinațiile posibile de $n-1$ laturi pentru a vedea care din ele nu conțin nici o buclă și deci formează un arbore. Dacă l este numărul total de laturi ale grafului, folosind acest procedeu ar trebui examinate C_l^{n-1} combinări de laturi; ori, chiar pentru un graf de complexitate medie, utilizînd mijloacele de calcul actuale, numărul acestor combinări este mult prea mare.

Principala dificultate a generării arborilor (coarborilor) printr-o asemenea metodă directă, constă în faptul că numărul de operații de calcul crește exponențial cu numărul de noduri.

S-a pus astfel problema obținerii unor metode sistematice de generare a tuturor arborilor (coarborilor) la care numărul de operații să varieze aproximativ liniar cu numărul nodurilor grafului și la care fiecare arbore (coarbore) să fie generat o singură dată (fără repetiții).

Cele mai uzuale metode de generare fără repetiții a arborilor (coarborilor) sînt cele iterative, care au la bază efectuarea unor „transformări elementare" prin care se generează un arbore din alt atbore [1], [6], respectiv — modificarea matricelor de incidență laturi-secțiuni (noduri) [3] sau MIE [17] prin operații elementare pe linii și coloane.

În [8] se arată că pentru efectuarea operațiilor elementare pe liniile și coloanele matricelor de incidență laturi-secțiuni, laturi-noduri sau MIE, nu este nevoie de stocarea acestor matrice, ci ele se pot efectua direct pe liniile 2 și 3 ale matricei de descriere a grafului respectiv. De exemplu, pentru a verifica dacă laturile {1, 2 ,3} din graful orientat G_0 din figura 1, b formează un arbore se procedează astfel:

1) Se consideră doi vectori, vectorul laturilor VL de dimensiune $n-1$ și vectorul nodurilor VN de dimensiune n (n fiind numărul nodurilor grafului considerat) care se completează după cum urmează.

2) Se introduce prima latură din combinația de $n-1$ laturi considerată în vectorul VL și în vectorul VN nodurile corespunzătoare

$$VL = \{1\} \text{ și } VN = \{4, 2\}.$$

3) Se caută dacă nodul 4 sau nodul 2 mai există cel puțin o dată pe liniile 2 sau 3 ale MD corespunzătoare setului de laturi considerat

$$MD = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Se observă că nodul 4 nu mai există, însă nodul 2 se mai găsește de două ori. Prima dată nodul 2 se află pe coloana 2 linia 2. Se completează vectorul NL cu latura 2 corespunzătoare coloanei pe care s-a găsit nodul 2 și vectorul VN cu celălalt nod (diferit de nodul 2) al laturii 2.

$$VL = \{1, 2\} \text{ și } VN = \{4, 2, 1\}.$$

Dacă nodul 2 nu se regăsește pe coloana a doua a MD ci pe o coloană k, $k > 2$, înainte de a se completa vectorii VM și VN se permută coloana k cu coloana 2. Dacă nici unul din nodurile 4 și 2 nu se mai regăsesc cel puțin odată în liniile 2 sau 3 ale MD înseamnă că subgraful considerat nu este conex și deci nu formează un arbore.

4) Se caută dacă nodul 1 mai există în vectorul VN. Dacă da, înseamnă că există o buclă și subgraful considerat nu este arbore. În caz contrar se procedează ca la punctul 3 cu nodurile 2 și 1.

În final se obține :

$$VM = \{1, 2, 3\} \text{ și } VN = \{4, 2, 1, 3\}.$$

5) Se verifică dacă vectorul VN conține toate nodurile grafului G_0. În caz afirmativ subgraful considerat este un arbore, iar în caz contrar, combinația de n—1 laturi considerată nu formează un arbore.

Un procedeu simplu, care folosește numai liniile 2 și 3 ale MD, de determinare a factorului de semn în metoda arborilor neorientați de calcul simbolic al funcțiilor de rețea, este prezentat în [18].

5. Concluzii

Analiza topologică a circuitelor electrice liniare și/ sau neliniare are o importanță deosebită în formularea pe calculator a ecuațiilor ce guvernează circuitele în regimul de funcționare studiat.

De asemenea, analiza topologică este utilizată pe larg în demonstrarea anumitor teoreme de existență, convergență și stabilitate folosite în analiza circuitelor electrice.

— pentru reducerea timpului de calcul și a memoriei este imperios necesar ca metodele de determinare a matricelor de incidență, de generare fără repetiții a arborilor sau coarborilor, de determinare a factorului de semn și de determinare a unui ANC (ARNC) să fie astfel concepute încît să răspundă pe deplin acestor deziderate.

Utilizarea tehnicilor de calcul cu matrice rare a permis reducerea substanțială a timpului de calcul și a memoriei, iar în cazul analizei propriu-zise a circuitelor și la creșterea notabilă a preciziei de calcul, mai ales în cazul analizei și proiectării circuitelor neliniare complexe.

În analiza, simularea și proiectarea pe calculator a circuitelor electrice și îndeosebi în analiza hibridă și în analiza în regim tranzitoriu prin metoda variabilelor de stare, cunoașterea elementelor în exces, ca tip și număr constituie o problemă de primă importanță, deoarece permite : stabilirea gradului de complexitate al circuitului, determinarea structurii ecuațiilor ce guvernează regimul studiat și dacă anumiți termeni ai ecuațiilor sînt nuli sau nu.

Metoda de determinare a unui AN (ARN) (sau a unui ANC (ARNC), în cazul circuitelor nereciproce) prezentată în lucrare, permite calculul numărului fiecărui tip de element în exces.

Pentru stabilirea gradului de complexitate a unui circuit nereciproc (activ), dat, se poate folosi un graf redus al circuitului, graf în care laturile (porțile) de comandă și comandate ale surselor comandate sînt modelate prin goluri și scurtcircuite (laturile : E_{ci}, F_{Ci}, E_{cu} și J_{Ci} prin scurtcircuite iar laturile : E_{Cu}, J_{cu}, J_{Cu} și J_{ci} prin goluri) [19].

BIBLIOGRAFIE

1. *L. O. Chua, M. P. Lin*, Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits : Algorithms and Computational Techniques, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
2. *Y. F. Iam*, Comment on Modelling of Three-Terminal Devices : A Black Box Approach, IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS—21, No. 6 Nov 1974, pp. 807—809
3. *M. Preda, P. Cristea, I. Dorobanțu*, Analiza topologică a circuitelor electrice, București, Editura tehnică, 1979.
4. *M. Iordache*, An Analysis Method for Nonlinear Networks with Controlled Sources, Magnetic Couplings and Excess Elements in Transient Behaviour, Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. et Energ., 3, 1981, p. 401—413.
5. *S. K. Chen*, Applied Graph Theory, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1971.
6. *S. Mayeda*, Graph Theory, New York : John-Willey Sons, Inc., 1972.
7. *C. I. Mocanu*, Teoria circuitelor electrice, Editura didactică și pedagogică, București, 1979.
8. *M. Iordache, Vl. Socaciu*, A Method for Tree Generation without Duplication, Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. et Energ., 1 1981, p. 55—62.
9. *M. Iordache, Gh. Tecuci*, A Method to Determine the Common Normal Essential Incidence Matrices for an Electric Network with Controlled Sources, Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotech. et Energ., 3, 1977, p. 343—352.
10. *N. Balabanian, T. Bickart, S. Seshu*, Teoria modernă a circuitelor, București, Editura tehnică, 1974.

11. *M. Iordache*, Utilizarea unei tehnici de calcul cu matrice rare în determinarea arborelui normal comun şi a matricelor incidenţelor esenţiale, E.E.A. — Electrotehnica, nr. 5 1982 p. 189—194.
12. *P. Cristea, M. Iordache*, Qualitative Analysis Method of Dynamic Electric Networks, Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn. et Energ., 1, 1982, p. 41—50.
13. *M. Iordache, D. Dornescu*— PSACELN — Program de Simulare şi Analiză a Circuitelor Electrice Liniare sau Neiiniare, E.E.A. — Electrotehnică, nr. 7, 1985 (în curs de apariţie).
14. *M. Iordache*, Generalization of the Topological Formulas with Homogeneous Parameters Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn, et Energ., 4, 1980, p. 501—513.
15. *M. Iordache*, PGDFR : Program General de Determinare a Funcţiilor de Reţea, E.E.A. Electrotehnica, nr. 8, nov. 1980, p. 363—368.
16. *W. Mayeda, S. L. Hakimi, W. K. Chen, N. Deo*, Generation of Complete Trees, IEEE Trans. Circuit Theory, CR—15, 1968, pp. 101—105.
17. *P. Cristea, R. Tuduce*, Symbolic and Numeric Hybrid Network Analysis — A Topological Formulation, 4th International Conference on Control Systems and Computer Science, Bucharest 17—20 June, 1981.
18. *M. Iordache, Vl. Socaciu*, O metodă generală de determinare a factorului de semn al perechilor de arbori şi al perechilor de coarbori, Bulet. Inst. Bucureşti nr. 1, 1981
19. *M. Iordache, S. Chira*, A New Determination Method of the Order of Complexity for a Nonreciprocal Electric Circuit, Rev. Roum. Sci. Techn. — Electrotechn et Energ., 1, 1983, p. 37—43.

The Topological Analysis : the Key of the Circuit Equations' Formulation on Computer

The paper presents some aspects of the electric circuits topology, which are essential in the simulation, analysis and design of the circuits on computer. This aspects are : the incidence matrix generation, the generation without duplication of the trees or cotrees, the determination of a normal tree and of the essential incidence matrix and the symbolic computation on the network functions.

C.Z. : 621.313.322

DETERMINAREA MĂRIMILOR DE REGIM STAȚIONAR ALE GENERATOARELOR SINCRONE, CUPLATE LA REȚEA

M. MIHALACHE *

În lucrare se prezintă cîteva relații de calcul al mărimilor caracteristice ale generatorului sincron, în funcție de puterile active și reactive, ca și de sarcină.
Experiențele efectuate au validat, cu bună aproximație, relațiile propuse.

1. Introducere

Un aspect deosebit de important în funcționarea generatorului sincron (producătorul exclusiv de energie electrică livrată sistemului energetic) îl constituie stabilitatea — statică sau dinamică, respectiv capacitatea acestuia de a se menține în sincronism cu rețeaua la care este cuplat, atunci cînd intervin anumite perturbații, de natură electrică sau mecanică în regimul staționar de funcționare. După cum este cunoscut, rezerva de stabilitate a generatorului este diminuată în regim subexcitat, respectiv pentru punctele de funcționare din cadranul 2 al diagramei $p - q$, mai cu seamă pentru generatoarele sincrone moderne caracterizate de valori mari ale reactanțelor sincrone.

Indiferent de metoda utilizată pentru analiza comportării dinamice a generatorului (metoda micilor oscilații) metoda variabilelor de stare etc.) o etapă absolut necesară o constituie definirea stării în momentul inițial aplicării perturbației, respectiv rezolvarea unei probleme de regim staționar. Considerînd generatorul sincron conectat la o rețea de putere infinită (u_R = const) prin intermediul unei reactanțe x_e, (reprezentînd reactanța echivalentă a transformatorului și a liniei de transport), mărimile interne ale acestuia pot fi determinate în funcție de puterea activă p (în unități relative) și reactive q de la bornele generatorului.

2. Calculul mărimilor electrice la bornele generatorului

În fig. 1a s-a reprezentat generatorul sincron conectat, printr-o linie fără pierderi ($r_e = 0$), la o rețea de putere infinită (u_R = const.).

Ecuația de tensiuni a sistemului din fig. 1a corespunde relației (1) — exprimată în unități relative :

$$u_G = u_R = jx_e i \tag{1}$$

* Șef lucrări dr. ing., catedra Mașini electrice

și este reprezentată în fig. 1b.

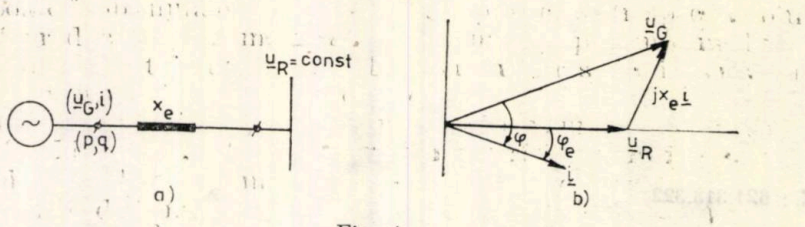


Fig. 1

Relației (1) îi corespunde următorul bilanț de puteri:

$$p = u_G i \cos\varphi = u_R i \cos\varphi_e \tag{2}$$
$$q = u_G i \sin\varphi = u_G i \sin\varphi_e + x_e i^2$$

Considerînd cunoscut setul de date (u_R, x_e, p, q) mărimile de regim staționar de la bornele generatorului, se determină din următoarele relații:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{q}{p}$$

$$\varphi_e = \operatorname{arctg}\left[-\frac{u^2 R}{2x_e p} + \sqrt{\frac{u_R^4}{4x_e^2 p^2} + \frac{u_R^2 \cdot q}{x_e \cdot p^2} - 1}\right]$$

$$u_G = u_R \cdot \frac{\cos\varphi_e}{\cos\varphi} \tag{3}$$

$$i = \frac{p}{u_G \cos\varphi}$$

Așa cum s-a specificat deja în paragraful introductiv, din punct de vedere al analizei stabilității, prezintă interes cadranul 2 al diagramei $p-q$ a generatorului respectiv regimul de absorbție a puterii reactive ($q < 0$).

În acest regim, din condiția de existență a unghiului φ_e, calculat din expresiile (3), mărimile u_R, x_e, p, q trebuie să satisfacă inegalitatea:

$$\frac{u_R^2}{4x_e^2 p^2} + \frac{u_R^2 \cdot q}{x_e p^2} - 1 \geqslant 0 \tag{4}$$

respectiv putere reactivă maximă ce mai poate fi absorbită de generator q_e, este dată de relația

$$q = x_e\left(\frac{p}{u_R}\right)^2 - \frac{u_R^2}{4x_e} \tag{5}$$

În planul $p - q$, pentru $u_R = \text{const.}$ și $x_e = \text{const.}$ $q_e = f(p)$, reprezintă un arc de parabolă care intersectează axele p și q, în punctele: $q_{oe} = -u_R^2/4x_e$ ($p = 0$) și respectiv $p_{oe} = u_e^2/2x_e$($q = 0$); în fig. 2 s-au reprezentat familiile de curbe $q_e = f(p)$ pentru $u_R = 1$ u.r. și diverse valori ale reactanței x_e, exprimate în unități relative.

Din fig. 2 se observă că pentru valori ale reactanței liniei $x_e > 0{,}25$ u.r., curbele $q = f(p)$ intersectează cercul C_s de rază unitate, respectiv pot constitui limite suplimentare pentru funcționarea în regim capacitiv a generatoarelor.

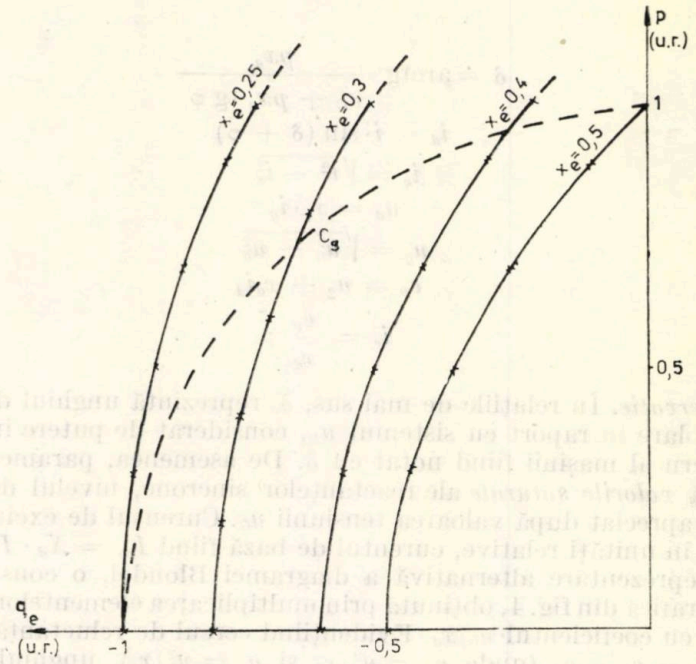


Fig. 2

3. Calculul mărimilor electrice interne ale generatorului

Considerînd generatorul sincron cu poli aparenți ($x_d \neq x_q$) mărimile interne ale acestuia corespund diagramei de tensiuni Blondel, reprezentată în fig. 3 și se pot determina în următoarea succesiune :

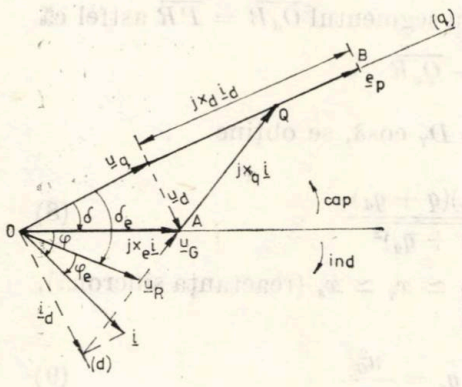


Fig. 3

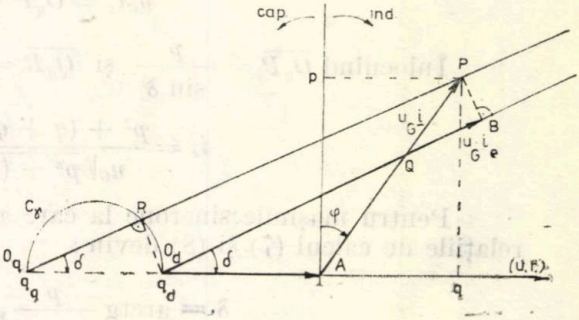


Fig. 4

$$\delta_e = \operatorname{arctg} \frac{p(x_q + x_e)}{u_R^2 + p(x_q + x_e) \operatorname{tg} \varphi_e}$$

și

$$\begin{aligned} \delta &= \operatorname{arctg} \frac{px_q}{u_G^2 + px_q \operatorname{tg} \varphi} \\ i_d &= i \cdot \sin(\delta + \varphi) \\ i_q &= \sqrt{i^2 - i_d^2} \\ u_d &= x_q \cdot i_q \\ u_q &= \sqrt{u_G^2 - u_d^2} \\ e_p &= u_2 + x_d i_d \\ i_e &= \frac{e_p}{x_d} \end{aligned} \tag{6}$$

Observație. În relațiile de mai sus, δ_e reprezintă unghiul de referință al roții polare în raport cu sistemul u_R, considerat de putere infinită, unghiul intern al mașinii fiind notat cu δ. De asemenea, parametrii x_d îi x_q reprezintă *valorile saturate* ale reactanțelor sincrone, nivelul de saturație putînd fi apreciat după valoarea tensiunii u_G. Curentul de excitație i_e este exprimat în unități relative, curentul de bază fiind $I_{eb} = X_d \cdot I_{e0n}$

O reprezentare alternativă a diagramei Blondel, o constituie construcția grafică din fig. 4, obținută prin multiplicarea elementelor diagramei din fig. 3 cu coeficientul u_G/x_d. Evidențiind cercul de reluctanță C_γ de diametru $D_\gamma = q_q - q_d$ (unde $q_d = u_G^2/x_d$ și $q_q = u_G^2/x_q$), unghiul intern al mașinii δ, precum și curentul de excitație, se obțin, analitic, prin relații mai compacte, în funcție de puterea activă p și reactivă q, de la bornele generatorului.

Astfel, din triunghiul dreptunghic $Q_q P_q$ obținem expresia de calcul a unghiului intern :

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{p}{q + q_q} \tag{7}$$

Curentul de excitație i_e este proporționat cu segmentul $\overline{O_d B} = \overline{PR}$ astfel că

$$u_G i_e = \overline{O_q P} - \overline{Q_q R}$$

Înlocuind $\overline{O_q P} = \dfrac{p}{\sin \delta}$ și $\overline{Q_q R} = D_\gamma \cos\delta$, se obține

$$i_e = \frac{p^2 + (q + q_q)(q + q_d)}{u_G \sqrt{p^2 + (q + q_q)^2}} \tag{8}$$

Pentru mașinile sincrone la care $x_d \simeq x_q \simeq x_s$ (reactanța sincronă), relațiile de calcul (7) și (8) devin :

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{p}{q + q_s}, \quad q_s = \frac{u_G^2}{x_s} \tag{9}$$

și respectiv

$$i_e = \frac{1}{u_G} \sqrt{p^2 + (q + q_s)^2} \tag{10}$$

Este de observat de asemenea că, în regim inductiv, curentul de excitație al mașinii sincrone anizotrope ($x_d \neq x_q$) se poate calcula cu o relație mai simplă, de tipul (10):

$$i_e = \frac{1}{u_G}\sqrt{p^2 + (q + q_d)^2} \tag{11}$$

deoarece, din fig. 4, în regim inductiv avem $\overline{O_dB} \simeq \overline{O_dP}$.

Relațiile (7) și (8) permit astfel determinarea completă a tuturor mărimilor interne de interes ale generatorului sincron, în funcție de valorile curente ale puterii active (p) și reactive (q) de la bornele generatorului.

4. Determinarea valorilor saturate ale reactanțelor sincrone x_d și x_q

În mod uzual, constructorul furnizează valorile nesaturate ale reactanțelor x_{d0} și x_{q0}, influența saturației considerîndu-se prin intermediul factorilor de saturație $k_{\mu d}$ și $k_{\mu q}$:

$$x_d = \frac{x_{d0}}{k_{\mu d}} \text{ și } x_q = \frac{x_{q0}}{k_{\mu q}},\ k_{\mu d},\ k_{\mu q} > 1 \tag{12}$$

Coeficientul de saturație din axa longitudinală, $k_{\mu d}$, se poate determina pe baza caracteristicii de mers în gol a mașinii $e_\mu = f(i_\mu)$, caracteristică ce poate fi aproximată analitic prin expresia:

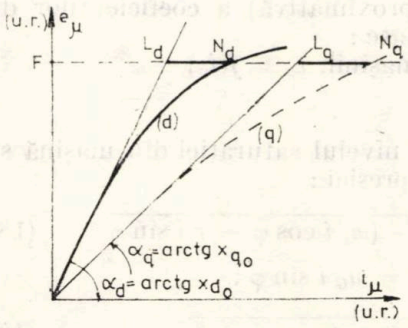


Fig. 5

$$e_\mu = \begin{cases} x_{d0} i_\mu, \text{ pentru } e_\mu \leqslant 0{,}5 \text{ u.r.} \\ \dfrac{i_\mu}{A + Bi_\mu}, \text{ pentru } e_\mu > 0{,}5 \text{ u.r.} \end{cases} \tag{13}$$

Definind $k_{\mu d} = \dfrac{NF_d}{FL_d}$ (fig. 5) expresia analitică a coeficientului $k_{\mu d}$ devine:

$$k_{\mu d} = x_{d0} \cdot \frac{A}{1 - Be_\mu} \tag{14}$$

respectiv valoarea reactanței saturate x_d

$$x_d = \frac{x_{d0}}{k_{\mu d}} = \frac{1 - Be_\mu}{A} \tag{15}$$

În ceea ce privește valoarea reactanței saturate din axa transversală, se pot considera următoarele variante:

a) se neglijează efectul saturației asupra parametrului x_q, respectiv $k_{\mu q} = 1$.

b) se consideră $k_{\mu q}=k_{\mu d}$; în acest caz valorile saturate ale reactanțelor se calculează astfel :

$$x_d = \frac{1 - Be_\mu}{A} \qquad (16)$$

$$x_q = \gamma \cdot x_d$$

unde $\gamma = x_{q0}/x_{d0}$ reprezintă factorul de anizotropie nesaturat al mașinii.

c) pe baza caracteristicii de mers în gol a mașinii, care reprezintă de fapt caracteristica de magnetizare din axa longitudinală (d) se construiește caracteristica de magnetizare din axa transversală (q) considerînd $L_q N_q = \alpha L_d N_d$ (fig. 5), Astfel, putem scrie :

$$k_{\mu d} = \frac{FN_d}{FL_d} = 1 + \frac{L_d N_d}{FL_d} = 1 + \frac{L_d N_d}{e_\mu} \cdot x_{d0}$$

și

$$k_{\mu q} = \frac{FN_q}{FL_q} = 1 + \frac{L_q N_q}{FL_q} = 1 + \frac{L_q N_q}{e_\mu} \cdot x_{q0}$$

de unde obținem expresia coeficientului de saturație $k_{\mu q}$ în funcție de $k_{\mu d}$ și α.

$$k_{\mu q} = 1 + \alpha(k_{\mu d} - 1)\gamma \qquad (17)$$

Valorile coeficientului α depind de configurația geometrică și proprietățile de material ale mașinii, urmînd a fi stabiliți fie prin calcul, fie prin experiment. În general :

$\alpha \leqslant 1$, pentru hidrogeneratoare

$\alpha \geqslant 1$, pentru turbogeneratoare

În concluzie, evaluarea (desigur aproximativă) a coeficienților de saturație $k_{\mu d}$ și $k_{\mu q}$ necesită următoarele date :

— caracteristica de mers în gol a mașinii, $e_\mu = f(i_\mu)$

— reactanțele nesaturate x_{d0} și x_{q0}

— valoarea coeficientului α ;

Valoarea tensiunii e_μ, ce determină nivelul saturației din mașină se poate determina prin calcul conform expresiei :

$$e_\mu = \sqrt{(u_G + r\,i\cos\varphi + x_\sigma i \sin\varphi)^2 - (x_\sigma\, i\cos\varphi - r\, i\sin\varphi)^2} \qquad (18)$$

respectiv ,înlocuind $p = u_G\, i\cos\varphi$ și $q = u_G\, i \sin\varphi$:

$$e_\mu = \frac{1}{u_G}\sqrt{(u_G^2 + r\cdot p + x_\sigma q)^2 + (x_\sigma p - rq)^2} \qquad (19)$$

Dacă nu se cunosc parametrii r și x_σ (rezistența și reactanța de scăpări a indusului) și generatorului, se poate aproxima $e_\mu \simeq u_G$.

5. Rezultate experimentale

În tabelul 1 sînt reluate rezultate experimentale efectuate asupra unui generator sincron avînd $S_n = 5$ kVA, $U_n = 220$ V rezultate prezentate în lucrarea [1]. Următoarele observații se impun :

— în prezenta lucrare se folosește sistemul de unități relative în baza x_d, spre deosebire de [1] unde s-a folosit baza x_{ad} ;

Tabelul 1

$S_n = 5$ KVA ; $U_n = 220$ V ; $x_{d0} = 1{,}46$ *u.r.* ; $x_{q0} = 0{,}74$ u.r. ; $I_{eb} = 1{,}93$ A

	Nr.	1	2	3	4	5	6
Date măsurate	p—u.r.	0,623	1,044	0,391	0,64	0,583	0,362
	q—u.r.	0,623	0	0	−0,405	−0,455	−0,402
	u_G—u.r.	0,76	0,87	0,87	0,82	0,87	0,82
	i_e—U.r.	0,71	1,48	0,85	0,76	0,62	0,43
	δ	18,5°	32°	15,5°	37°	31°	26°
Date calculate	e—u.r	0,85	0,93	0,89	0,83	0,87	0,81
	x_d—u.r	1,15	1	1,07	1,18	1,11	1,22
	x_q—u.r	0,58	0,5	0,54	0,6	0,56	0,62
	δ	21°	34°	15,6°	41°	33°	28°
	i_{e_B}—u.r	1,67	1,39	0,9	0,67	0,58	0,37
	i_{e_p}—u.r	1,68	1,48	0,93	0,805	0,72	0,48

— reactanțele sincrone saturate s-au determinat conform relațiilor (16);

— curentul de excitație i_{eB} (metoda Blondel) s-a calculat conform relației (8), rezultatele indentice obținîndu-se prin utilizarea setului de relații (6);

— deși mașina este cu poli aparenți ($x_d \neq x_q$) curentul de excitație determinat prin metoda Potier i_{ep} (rel. 11) aproximează destul de bine curentul de excitație determinat experimental.

În tabelul 2 sînt preluate rezultatele experimentale obținute în lucrarea [2], rezultate ce privesc un turbogenerator avînd $S_n = 150$ MVA, $\cos\varphi_n = 0{,}8$, $U_n = 13{,}8$ kV, $x_{d_0} = 1{,}85$ u.r. și $x_{q0} = 1{,}76$ u.r.

Tabelul 2

$S_n = 150$ MVA ; $U_n = 13{,}8$ kV ; $x_{d0} = 1{,}85$ u.r. ; $x_{q0} = 1{,}76$ u.r ; $I_{eb} = 680$ A

	Nr	1	2	3	4	5	6
Date măsurate	p—u.r.	0,803	0,803	0,787	0,8	0,8	0,84
	q—u.r	−0,069	−0,023	−0,142	−0,140	−0,346	−0,329
	u_G—u.r	1,01	1,007	1,004	1,004	1	0,987
	i_e—u.r	0,956	1	0,897	0,912	0,809	0,868
		55°	53°	58°	59°	71°	72°
Date calculate	x_d—u.r	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65
	x_q—u.r.	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58
		54,3°	52,4°	57,8°	58,1°	70,3°	71,7°
	i_{e_B}— u.r	0,963	0,990	0,913	0,924	0,841	0,890
	i_{e_p}—u.r	0,963	0,990	0,912	0,925	0,841	0,891

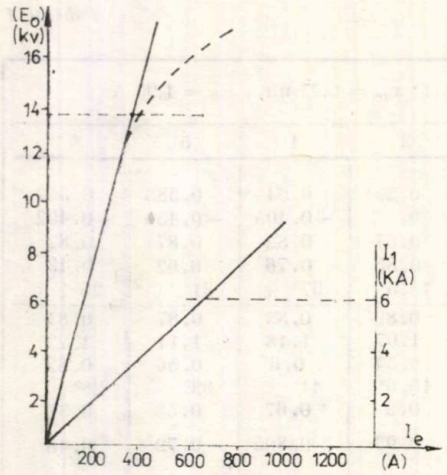


Fig. 6

În fig. 6 s-au reprodus caracteristicile de mers în gol și scurtcircuit trifazat al generatorului, de unde obținem : $K_{\mu d} = 1{,}12$, $I_{eb} = 680$ A. Încercările experimentale fiind efectuate practic la tensiunea nominală (tabelul 2), valorile saturate ale reactanțelor au fost cele corespunzătoare lui $k_{\mu dn} = 1{,}12$ respectiv $k_{\mu qn} = 1{,}11$ (relația (17) cu $\alpha = 1$). Mărimile calculate corespund aproape perfect celor determinate experimental; de asemenea valorile curentului de excitație calculat prin metoda Blondel respectiv Potier.

6. Concluzii

Considerînd generatorul sincron cuplat la o rețea de putere infinită, prin intermediul unei linii de reactanță inductivă x_e, se impun următoarele observații :

a) pentru valori ale reactanței $x_e > 0{,}25$ u.r., curbele limită $q = f(p)$ pot constitui limite suplimentare pentru funcționarea în regim capacitiv a generatorului;

b) în lucrare se obțin relații compacte pentru calculul curentului de excitație i_e și a unghiului intern δ, în funcție de mărimile p_q și q de la bornele generatorului, relații ce constituie o alternativă mai simplă în raport cu metodica curentă (rel. 6);

c) se propune o nouă metodă de evaluare a coeficientului de saturație din axa transversală (rel. 17), evaluarea corectă a nivelului de saturație în cele două axe rămînînd însă o problemă deschisă;

d) rezultatele experimentale (corespunzătoare datelor din tabelul 1 și 2) confirmă, cu o bună aproximație relațiile de calcul propuse, erorile fiind mai mici pentru exemplul din tabelul 2 aceasta datorîndu-se în mare parte nivelului redus al saturației la această mașină (vezi fig. 6), ceea ce conduce la o precizie mai mare a relațiilor analitice.

BIBLIOGRAFIE

1. *M. Mihalache*, Asupra predeterminării caracteristicilor de funcționare în sarcină a generatoarelor sincrone anizotrope E.E.A. — Electrotehnica, 31, (1983), nr. 8, 345.
2. *G. Shackshaft, R. Neilson*, Results of stability tests on an underexcited 120 MW generator. Proc. of I.E.E., 119, (1972), 2. p. 175
3. *J. Barral, R. Bonnefille, J. Meisiere*, Contribution à l'étude de la machine synchrone à circuit magnétique saturé R.G.E., 87, (1978), 11, p. 855.
4. *V. Nedelcu*, Teoria conversiei electromecanice, Editura tehnică, București, 1978.

Determination of the Steady-State Quantities of the Mains-Connected Synchronous Generator

In the paper there are suggested some analytical relations for the calculation of thinner quantities (δ, i_e) of the generator, depending on the active (p) and reactive (q) powers at its terminals.

The outlined experimental results validate the proposed relations with a good approximation.

C.Z. : 621.311

MODÉL OPERAȚIONAL PRIVIND CONDUCEREA AUTOMATĂ A SISTEMELOR ELECTROENERGETICE ÎN CONDIȚII DE SECURITATE

C. DUMITRIU, LUCIA DUMITRIU, V. BOSTAN *

Conducerea optimă din punctele de vedere tehnic și economic a sistemelor electroenergetice constituie preocuparea principală a dispecerului energetic și este rezolvată, în condițiile actuale, cu ajutorul calculatoarelor numerice de mare putere funcționînd din regimuri „on" și „off-line".

În lucrare se propune luarea în considerație, în momentul stabilirii soluției de comandă optimă a sistemului și a condițiilor impuse de necesitatea funcționării sigure a acestuia analizîndu-se regimul și din punctul de vedere al stabilității statice și tranzitorii. Sînt introduși indicatori care caracterizează evoluțiile posibile din punct de vedere al stabilității sistemului electroenergetic studiat și care pot fi luați în considerare și în cadrul unui program de optimizare a regimului permanent de funcționare.

1. Introducere

Sistemele electroenergetice, sisteme puternic interconectate și automatizate dotate cu calculatoare de mare performanță se găsesc în prezent în faza intrării în etapa cibernetizării [2], [3], [4], [5].

S-au dezvoltat în cele mai importante puncte de producere și consum a energiei, centre de calcul specializate, au fost introduse în conducerea directă a instalațiilor electroenergetice necesare calculatoare de proces. În stațiile principale ale sistemului se găsesc evidențiate mărimile de stare de bază ale regimului de funcționare urmărit în variantă „on line" cu ajutorul unei puternice rețele de telesemnalizare și telemăsurare.

În multe țări ale lumii s-au creat, pe lîngă rețelele naționale de calculatoare, și rețele proprii de calculatoare ale sistemului energetic național avînd realizate legături de acces la rețeaua națională de calculatoare.

Îmbunătățirea continuă a performanțelor calculatoarelor folosite, în ceea ce privește capacitatea memoriei și viteza de calcul permite proiectarea în perspectivă nu prea îndepărtată a unor sisteme de funcționare

* Asist. ing., catedra Centrale și rețele electrice ; Asist dr. ing., catedra Electrotehnică ; Asist. ing., catedra Centrale și rețele electrice

„on-line" vizînd procese și instalații principale din sistem, precum și introducerea treaptată a unor elemente semnificative de conducere automată a SEE.

În acest fel, se poate preconiza realizarea unor sisteme de conducere automată a SEE, eliminîndu-se imprecizia și subiectivismul deciziilor umane precum și crearea posibilității urmăririi continue și corectării de către sistemele centrale de calcul a unor probleme extrem de importante precum conducerea prin dispecer economic, în condiții de securitate, a SEE.

Rezolvarea acestei probleme complexe presupune modelarea a două procese principale :

— calculul regimului permanent de funcționare a SEE ca o problemă de optimizare (micșorarea costului de exploatare sau a pierderilor de putere), luîndu-se în considerare și restricții privind siguranța de funcționare, sub aspectul respectării condițiilor necesare pentru asigurarea stabilității statice a ansamblului și determinarea condițiilor de funcționare care să ofere, între anumite limite, certitudinea păstrării stabilității în orice regim tranzitoriu posibil ;

— proiectarea unor sisteme de calcul capabile să realizeze transmiterea automată a comenzii de corectare a parametrilor regimului în funcționare normală, în vederea implementării soluției optime găsite și conducerea automată a SEE în timpul regimului tranzitoriu, asigurîndu-se eliminarea în timp optim a defectului și apoi, corectarea regimului postavarie pentru realizarea funcționării optime economice.

Realizarea acestor obiective necesită alcătuirea unor biblioteci de programe de calcul,precum și a unei bănci de date conținînd elementele caracteristice pentru un număr foarte mare de regimuri permanente de funcționare, testate sub aspectul stabilității statice și a celei tranzitorii, precum și a unei rețele de calculatoare proprii și a unor scenarii sigure pentru toate situațiile de avarie.

2. Definirea indicatorilor de stabilitate

Pentru rezolvarea problemei în studiu, a fost necesară introducerea unor indicatori de stabilitate, expresii sintetice ale funcționării SEE în regim tranzitoriu sau la mici perturbații, simpli și ușor corelabili cu mărimile de stare ale sistemului.

a) Pentru caracterizarea stabilității tranzitorii, s-a apelat la folosirea accelerației mașinilor sincrone în primul moment al regimului tranzitoriu, constatîndu-se prin studii aprofundate [6], [7], [8], că maximul acestora la momentul t_{0+} pentru o structură dată, asigură determinarea univocă a timpului maxim de eliminare a defectului din instalație și implicit funcționarea stabilă a SEE în regimul postavarie.

Accelerația unei mașini la un defect pe una din barele sistemului (i) se scrie sub forma :

$$\gamma_k^i = \frac{P_{mk} - P_{ek}^i}{M_k} \tag{1}$$

unde :

γ_k^i — accelerația mașinii k la defect pe bara i;

P_{mk} — puterea mecanică a mașinii k;

P_{ek}^i — puterea electrică a mașinii k la un defect pe bara i la momentul t_{0+};

M_k — constanta de inerție a mașinii k.

Puterea electrică se calculează cu relația :

$$P_{ek}^i = \mathrm{Re}\left\{\underline{E}_k \sum_{j=1}^{NG} \underline{Y}_{kj}^{i*} \underline{E}_j^*\right\}, \quad k \in G \tag{2}$$

cu : $\underline{Y}_{ik}$ — admitanța de transfer dintre nodurile k și j (matricea redusă);
$\underline{E}_k, \underline{E}_j$ — tensiunile electromotoare ale mașinilor k și j în momentul t_{0+}.

Se consideră (lucru verificat pentru un număr mare de cazuri) că cel mai grav defect care poate să apară într-un sistem electroenergetic este scurtcircuitul trifazat pe barele centralei celei mai încărcate. Pentru acest tip de defect se calculează, cu un program de stabilitate tranzitorie timpul maxim de eliminare a defectului. Se definește un *indicator de stabilitate tranzitorie* [7] care este strîns legat de valoarea cea mai mare a accelerației mașinilor care poate fi atinsă la cel mai grav defect, pentru care se determină timpul de eliminare a defectului.

Acest timp este dependent de încărcarea centralei celei mai mari a sistemului analizat și limitarea lui conduce indirect la limitarea încărcării acestei centrale.

Pentru defecte variate, în special ca loc de amplasare, se pot determina diferite valori ale indicatorului de stabilitate tranzitorie și implicit, diferiți timpi de eliminare a defectului.

O reprezentare grafică a indicatorului de stabilitate tranzitorie în funcție de timpul de eliminare a defectului este prezentată în figura 1.

Din figură se desprinde concordanța logică dintre valorile mici ale indicatorului de stabilitate tranzitorie, și deci ale accelerației maxime inițiale și durata mare a timpului de eliminare a defectului. Pentru un SEE considerat, se construiește o familie de curbe de acest tip, variind regimul de încărcare a generatoarelor și sarcinilor și apoi a structurii sistemului, obținîndu-se în jurul unui regim de bază un set bogat de contingențe. Calculul acestor curbe de variație se face în conformitate cu organigrama din fig. 2.

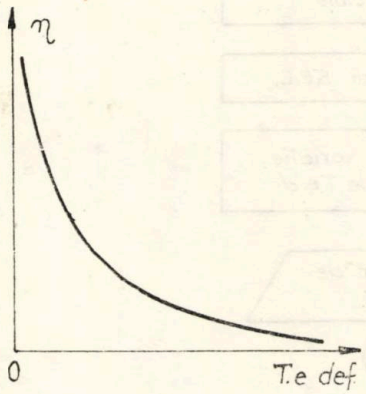


Fig. 1

b) Pentru caracterizarea stabilității statice a SEE se scriu ecuațiile de funcționare în regim permanent sub forma unor ecuații de bilanț a puterilor active și reactive (ca la metoda Newton-Raphson) și se linearizează (ecuațiile micilor deplasări) [1], [2], [3].

Pentru generatoarele din sistem (g) :

$$\frac{\partial \Delta P_i}{\partial \delta_i} \mathrm{d}\delta_i + \frac{\partial \Delta P_i}{\partial \theta_i} \mathrm{d}\theta_i + \frac{\partial \Delta P_i}{\partial U_i} \mathrm{d}U_i = \mathrm{d}P_{i, i \in G \setminus e} \tag{3}$$

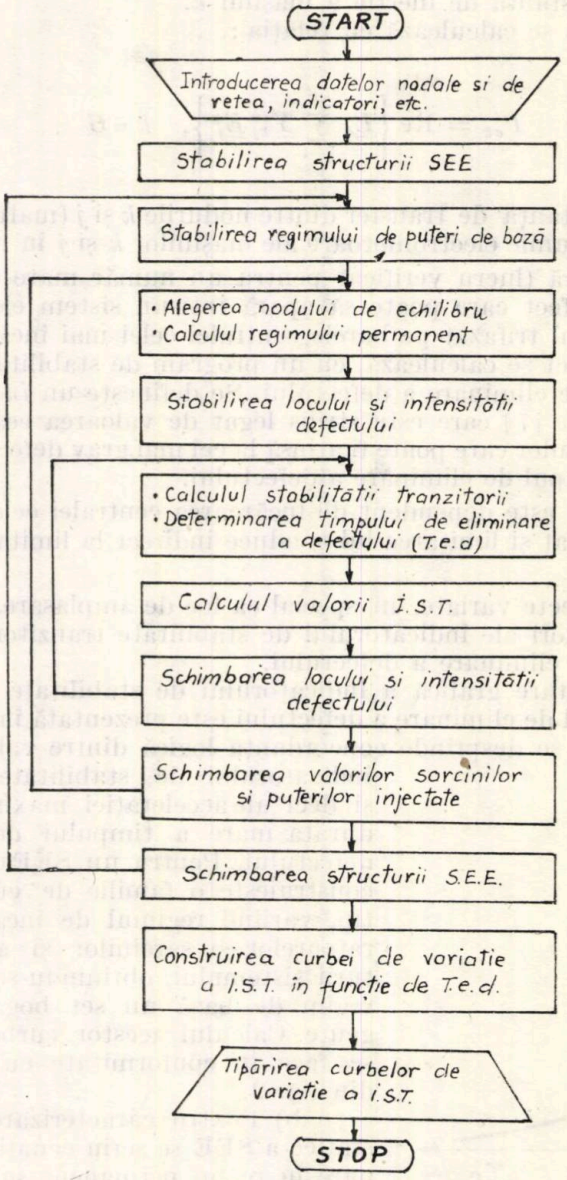


Fig. 2 — Organigrama de construire a curbei de variație a I.S.T. în funcție de T.e.d.

iar pentru restul nodurilor rețelei (r) se scriu cîte două ecuații :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Delta P_j}{\partial \delta_j} \mathrm{d}\delta_j + \sum\limits_{k \in r} \dfrac{\partial \Delta P_k}{\partial \theta_k} \mathrm{d}\theta_k + \sum\limits_{k \in r} \dfrac{\partial \Delta P_k}{\partial U_k} \mathrm{d}U_k = 0, j \in r \\ \dfrac{\partial \Delta Q_j}{\partial \delta_j} \mathrm{d}\delta_j + \sum\limits_{k \in r} \dfrac{\partial \Delta Q_k}{\partial \theta_k} \mathrm{d}\theta_k + \sum\limits_{k \in r} \dfrac{\partial \Delta Q_k}{\partial U_k} \mathrm{d}U_k = -\mathrm{d}Q_j, \; j \in n \end{cases} \tag{4}$$

Metoda impune folosirea numai a cîte unei creșteri a puterii într-unul din nodurile sistemului ($\mathrm{d}P_i$ pentru nodurile generatoare și $\mathrm{d}Q_j$ pentru nodurile consumatoare) și definește indicatorii de stabilitate statică [1] :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}\delta_i} = -\dfrac{1}{K_{ii}} > 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}Q_j}{\mathrm{d}U_j} = -\dfrac{1}{K_{jj}} < 0 \end{cases} \tag{5}$$

unde K_{ii} și K_{jj} sînt coeficienții mărimilor (5) din sistemele (3) și (4) (se caută pe diagonala principală a matricei jacobian a sistemului (3) + (4)).

Acești coeficienți de stabilitate statică, pentru a respecta condițiile (5) trebuie să fie pozitivi, iar mărimea lor indică distanța regimului față de stările critice. Se realizează, de asemenea, o legătură între acești coeficienți și încărcarea mașinilor din sistem, respectiv valoarea modulului tensiunii din nod.

Calculele se repetă pentru toate barele sistemului în diferite regimuri de încărcare și de structură ; se realizează astfel o bancă de date a sistemului de bază considerat.

3. Utilizarea indicatorilor de securitate în calculele de optimizare a funcționării de durată a SEE [8]

Regimul permanent de funcționare a SEE se obține printr-un proces de optimizare ținîndu-se seama de existența tuturor limitărilor în funcționarea elementelor sale componente :

— variația tensiunii tuturor nodurilor între limitele maximă și minimă ;

— variația puterilor active și reactive ale generatoarelor între limitele maxime și minime impuse de motorul primar și de funcționarea sistemului de excitație ;

— posibilitățile de reglare a raportului de transformare (ca modul și argument) al transformatoarelor cu raport complex ;

— existența unor limitatoare de unghi intern la unele generatoare ;

— încadrarea puterilor la consumatori între anumite limite.

Acestui set de restricții, transformabil ușor într-un pachet de relații de egalitate sau inegalitate, i se mai adaugă :

— obținerea unui timp impus de eliminare a defectului, datorat stării instalațiilor de protecție și comutație a SEE la un moment dat ;

— obținerea unor coeficienți de rezervă de stabilitate statică în conformitate cu standardele în vigoare și cu starea de funcționare a SEE. Și aceste restricții se pot scrie sub forma unor inegalități :

$$T.e.\text{def.}^{\text{impus}} \; ; \quad Ks.s.^{\text{impus}} \tag{6}$$

care se pot transforma în limitări ale puterilor active și reactive în nodurile sistemului ; nu se mai introduc astfel variabile suplimentare ci se schimbă limitele inițiale.

O altă variantă de calcul ar putea fi și aceea în care după determinarea soluției optime, se verifică indicatorii de stabilitate statică și tranzitorii, iar în caz contrar se adoptă măsurile de corecție necesare.

În cazul în care condițiile (6) nu se pot realiza pentru un anumit SEE, se pot lua măsuri de îmbunătățire a structurii și încărcării acestuia :

— separarea grupurilor de mare putere dintr-o centrală pe bare diferite, funcționînd cu cuplele deschise și alimentînd zone diferite din SEE ;

— creșterea rezervei turnante din sistem introducîndu-se grupuri noi în funcțiune.

Prima variantă de calcul este mai interesantă deoarece nu modifică structura modelului de optimizat ușurîndu-se alcătuirea programelor de calcul necesare.

4. Utilizarea indicatorilor de securitate în conducerea automată a SEE

Conducerea automată a SEE presupune existența unui calculator central de mare performanță, a unei rețele de calculatoare proprii și a unei bănci de date cu acces multiplu.

a) În regim normal de funcționare (fig. 3) informațiile privind starea sistemului sînt transmise unui estimator de stare și calculatorului central. Acesta dă comandă de aducere din banca de date a curbelor de variație a indicatorului de stabilitate tranzitorie și a valorilor indicatorilor de stabilitate statică. Pe baza regimului permanent estimat, se calculează modelul extins al SEE și se calculează valoarea IST, determinîndu-se timpul de eliminare a defectului. Cu aceste valori determinate se optimizează regimul permanent de funcționare și se dau comenzile de :

1. corectare a valorilor variabilelor de stare (în stațiile de comandă) ;
2. memorare a regimului optimizat.

b) În regim tranzitoriu comanda automată se realizează în mai multe etape (fig. 4) :

— în prima etapă se determină timpul de eliminare a defectului și se comandă întrerupătoarele ;

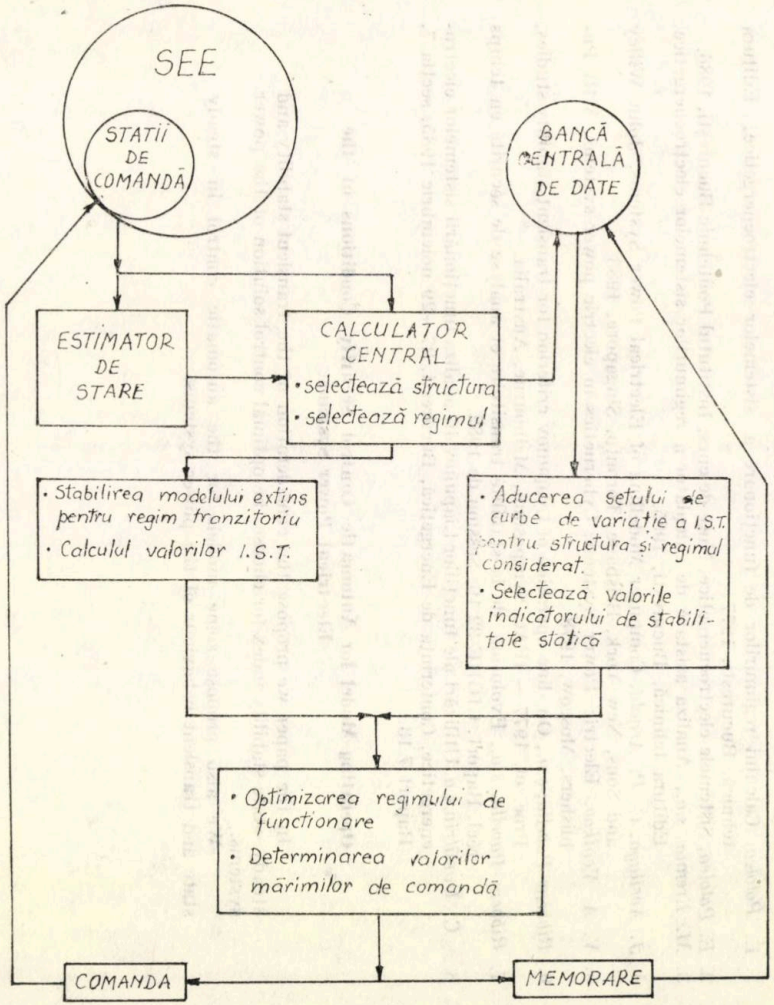


Fig. 3 — Organigrama de comandă automată (on-line) a regimului permanent de funcționare

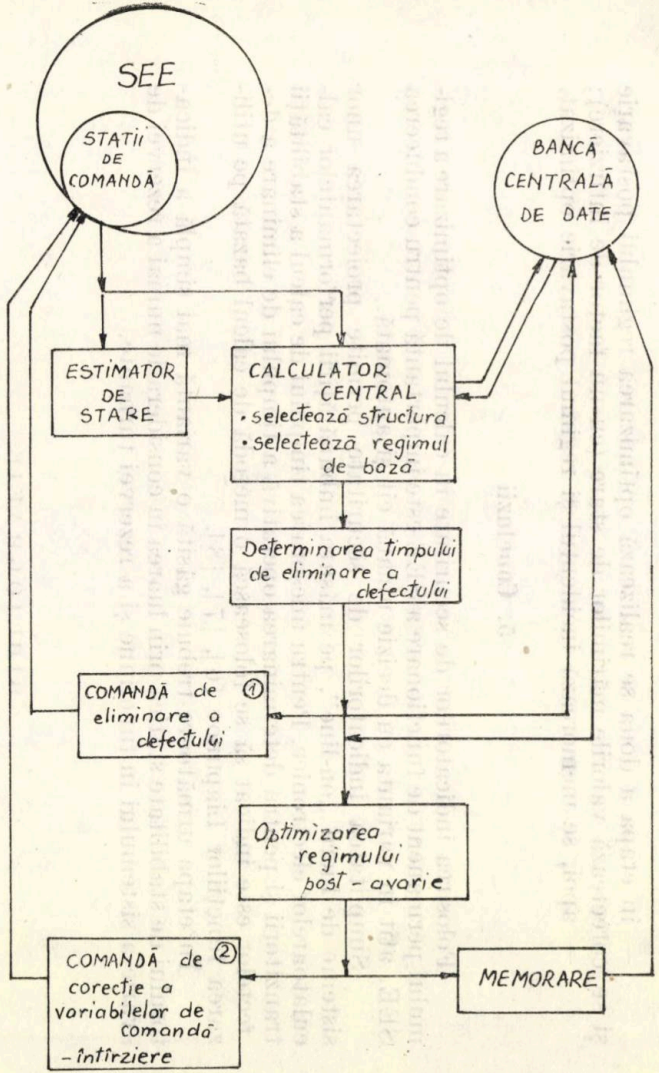


Fig. 4 — Organigrama de comandă automată (on-line) a SEE în regim tranzistoriu

— în etapa a doua se realizează optimizarea regimului postavarie şi se corectează valorile mărimilor de stare (cu un factor de întîrziere);
— apoi, se memorează incidentul şi regimul postavarie optimizat.

5. Concluzii

Folosirea indicatorilor de securitate în calculul de optimizare a regimului permanent de funcţionare a SEE este importantă pentru conducerea SEE, atît în varianta cu decizie umană cît şi automată.

Simplitatea indicatorilor de securitate permite proiectarea unor sisteme de lucru „on-line", pe măsura îmbunătăţirii performanţelor calculatoarelor electronice. Pentru micşorarea timpului de calcul a stabilităţii tranzitorii şi pentru determinarea operativă a timpului de eliminare a defectelor este indicat să se folosească o metodă de calcul bazată pe utilizarea funcţiilor Liapunov [6], [7], [8].

În etapa următoare trebuie găsită o variantă mai simplă a indicatorului de stabilitate statică prin luarea în consideraţie numai a rezervei de avarie a sistemului în funcţiune şi a rezervei turnante.

BIBLIOGRAFIE

1. *E. Pololea*, Calculul regimurilor de funcţionare a sistemelor electroenergetice, Editura tehnică, Bucureşti, 1977
2. *E. Pololea*, Sistemele electroenergetice, Note de curs, Institutul Politehnic Bucureşti, 1986.
3. *M. Eremia ş.a.*, Analiza asistată de calculator a regimurilor sistemelor electroenergetice, Editura tehnică, Bucureşti, 1985.
4. *J. Avrilaga, C. P. Arnold*, Computer Modelling of Electrical Power Systems, John Willey and Sons, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1983.
5. *V. A. Venikov*, Electric Power Systems, Cybernetics in electric power systems, MIR Publishers, Moscow, 1978
6. *Ribbens-Pavella, ş.a.*, On -line operation of Lyapunov criterion for transient stability studies, Proc. of. 1977 — IFAC Symposium, Melbourne, Australia.
7. *Ribbens-Pavella, s.a.*, Evolution de la stabilité transitoire et analyse de sécurité en temps réel, Raport, CIGRE 32.19, Session de 1982.
8. C. *Dumitriu ş.a.* Utilizări ale funcţiilor Liapunov în analiza funcţionării sistemelor electroenergetice, Conferinţa de Energetică, Bucureşti, 27—29 noiembrie 1985, secţia 7, Raport 7.13.

Operating Model for Automatic Control Security Conditions of the Electrical Power Systems

In the paper we propose the consideration of the transient stability and steady state stability index for choose the optimal control solution of the power systems.

We also propose some models for the automatic control in steady state and transient behaviour of the power systems.

ALEXANDRU TH. POPESCU
(1897—1974)

Profesorul Alexandru Th. Popescu s-a născut la 11 august 1897 la Bîrlad, într-o familie de actori dramatici.

În anul 1916 își dă bacalaureatul și este admis, printre primii trei, la vechea Școală de Poduri și Șosele. În anul 1922 absolvă Școala, obținînd diploma de inginer electromecanic, cu mențiunea „Foarte bine". Între anii 1924—1926, a funcționat ca asistent asociat la Politehnica din București, la catedra de Electrotehnică.

Pînă în 1949, deci timp de 21 de ani a funcționat neîntrerupt ca membru al corpului didactic și inginer sub-șef și apoi șef al Laboratorului de electrotehnică pentru încercări industriale și cercetări, pe care l-a *înființat* și l-a organizat. A contribuit la funcționarea armonioasă a întregului ansamblu de laboratoare de electrotehnică, ocupîndu-se și de reorganizarea laboratoarelor didactice de Măsuri electrice și magnetice, Mașini electrice, Electricitate și electrotehnică.

Între anii 1928—1940 a avut gradul didactic de asistent universitar, apoi în anul universitar 1940—1941 a devenit șef de lucrări, între anii 1942—1948 a fost conferențiar, iar în 1948 profesor, fiind numit șef al catedrei de Măsuri și aparate electrice.

În intervalul 1940—1948 a ținut studenților prelegeri privind „Încercările de măsuri și mașini electrice", „Încercări de înaltă tensiune", „Încercări oscilografice", precum și cursurile de Electrotehnică (Chestiuni speciale) și de Iluminat electric.

Din 1949 a devenit titularul cursului de Măsuri electrice și magnetice, pe care l-a predat pînă la pensionarea sa, la 30 septembrie 1967.

Eminent pedagog, cercetător riguros și pasionat, cu o vastă cultură, dăruit laboratorului și studenților săi, de care s-a apropiat cu neasemuită delicatețe și afecțiune, profesorul emerit Alexandru Th. Popescu, de la a cărui naștere se împlinesc 90 de ani, reprezintă, pentru numeroasele generații de ingineri electrotehnicieni și energeticieni, pe care i-a format și educat în spiritul rigorii științifice, modelul dascălului devotat școlii.

Lecțiile sale, bine sistematizate, clare și concise, au prezentat unitar problemele fundamentale ale unui domeniu deosebit de vast : știința măsurării mărimilor electrice și neelectrice. Profesorul a accentuat necesitatea realizării judicioase a *sintezei și analizei* procesului de măsurare, prin elaborarea metodei și alegerea aparatelor în funcție de cerințele metrologice impuse și *evaluarea măsurării*, prin aprecierea surselor de erori și prelucrarea rezultatelor.

Lucrările de laborator, de înalt nivel, pe care le-a elaborat, constituie și astăzi suportul de bază pe care s-a dezvoltat și modernizat disciplina de Măsurări electrice.

În activitatea sa didactică și științifică, a dovedit remarcabile calități : entuziasm și perseverență, disciplină autoimpusă, străduință perma-

nentă de autoperfecționare, spirit fin de observație, minuțioasă atenție la detaliile tehnicilor de laborator și ale evaluării logice a rezultatelor.

S-a implicat activ în viața universitară; opiniile sale, totdeauna judicios și elegant argumentate, impuneau prin respectul față de corectitudine în relațiile interumane, prin cultivarea valorilor reale.

A îndrumat, pînă în ultimile zile ale vieții sale, munca de cercetare a tinerilor săi doctoranzi.

Trebuie să compensăm absența celor plecați prin amintire. Memoria este oglinda în care îi privim pe cei absenți.

În memoria noastră, a celor care i-am fost vremelnic în preajmă, profesorul emerit Alexandru Th. Popescu este o prezență vie, căreia îi aducem omagiul nostru de profundă recunoștință.

Carmen Golovanov
catedra de Măsuri și aparate electrice
Institutul politehnic București

I. P. Informația c. 1782 40.480

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI ELECTROTEHNICA, ENERGETICA, AUTOMATICA-CALCULATOARE, ELECTRONICA, MECANICA, CONSTRUCŢII DE MAŞINI TRANSPORTURI-AERONAVE, CHIMIE, METALURGIE

apare în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physiques pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" şi „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din institut. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa privind articolele, schimburile de publicaţii şi abonamentele se fac pe adresa institutului.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭНЕРГЕТИКА, АВТОМАТИКА-СЧЕТНО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ, ЭЛЕКТРОНИКА, МЕХАНИКА, МАШИНОСТРОЕНИЕ, ТРАНСПОРТ—САМОЛЕТОСТРОЕНИЕ ХИМИЯ, МЕТАЛУРГИЯ

продолжает прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" и „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Составленный на новых основах он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского политехнического института. В пределах возможностей будут опубликоваться и научно-исследовательские работы специалистов извне.

Переписка, обмен периодическими изданиями и подписка производятся по адресу института.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI ELECTROTECHNICS, ENERGETICS, AUTOMATIC CONTROL-COMPUTERS, ELECTRONICS, MECHANICS, MACHINE BUILDING, TRANSPORT-AERONAUTICS, CHEMISTRY, METALLURGY

The Bulletin continues the old scientific periodicals : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" and „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organized on a new basis, it primarily reflects the scientific activity of the academic staff from Institute. Researchers from outside the institute can also publish their papers within the available space.

The correspondance regarding the articles, change of publications and subscriptions are sent to the following address.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI ELECTROTECHNIQUE, ENERGETIQUE, AUTOMATIQUE-ORDINATEURS, ELECTRONIQUE, MECANIQUE, CONSTRUCTIONS MECANIQUES, TRANSPORTS-AERONAUTIQUE, CHIMIE, METALLURGIE

continue les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées", „Buletinul Politehnicei din Bucureşti" et „Buletinul Institutului politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" Bucureşti".

Organisé sur de nouveaux principes il reflète tout d'abord l'activité scientifique du corps enseignant de l'Institut. Dans la limite de l'espace disponible on peut y publier aussi les travaux scientifiques des collaborateurs de l'extérieur.

L'adresse pour la correspondance concernant les articles, les échanges de publications et les abonnements est :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
ROMÂNIA

Splaiul Independenţei nr. 313
Căsuţa Poştală nr. 2356

Lei 35